

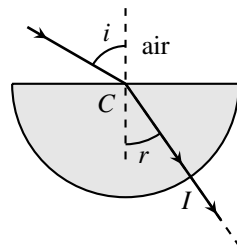
Corrigés

Application 1

On représente schématiquement la situation sur la figure ci-contre. Attention, l'angle indiqué sur le schéma n'est **pas** l'angle d'incidence. Le véritable angle d'incidence, mesuré par rapport à la normale, vaut $i = 90 - 30 = 60^\circ$ (c'était un petit piège !). Le rayon se dirige vers un milieu plus réfringent donc il ne peut être totalement réfléchi. Il est réfracté en s'approchant de la normale. On applique la loi de la réfraction en C :

$$\sin i = n \sin r \iff r = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) = 35^\circ$$

Le rayon qui se propage dans le verre est confondu avec la normale en I car il passe par C qui est le centre du dioptré circulaire. Il est donc réfracté en I sans être dévié.



Application 2

1. On note r l'angle de réfraction en I . On cherche d'abord une relation entre i et r en travaillant dans le triangle AIJ . On reconnaît que $\widehat{AIJ} = \frac{\pi}{2} - r$, $\widehat{AJI} = \frac{\pi}{2} - i$ et $\widehat{IAJ} = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

On somme les angles de ce triangle :

$$\pi = \frac{\pi}{2} - r + \frac{\pi}{2} - i + \frac{\pi}{2} - \alpha \iff \alpha + i + r = \frac{\pi}{2} \iff r = \frac{\pi}{2} - i - \alpha.$$

On relie ensuite i_0 et r en écrivant la loi de la réfraction en I : $\sin i_0 = n \sin r$.

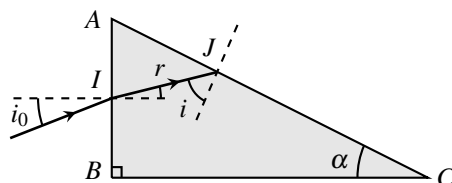
On conclut que : $i_0 = \arcsin\left(n \sin\left(\frac{\pi}{2} - i - \alpha\right)\right)$. On peut légèrement simplifier cette expression en utilisant l'identité trigonométrique $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$: $i_0 = \arcsin(n \cos(\alpha + i))$.

2. En J le rayon se dirige vers un milieu moins réfringent, il y a possiblement réflexion totale. Pour simplifier les calculs on se place dans le cas limite : $i = i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$.

D'après la question précédente on a : $i_{0,\text{lim}} = \arcsin\left(n \cos\left(\alpha + \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = 40,6^\circ$.

Pour montrer que c'est une valeur maximale on raisonne de la manière suivante. Partons de la situation limite ($i = i_{\text{lim}}$ et $i_0 = i_{0,\text{lim}}$), et imaginons que i_0 diminue. Alors r diminue (d'après la loi de la réfraction), et i augmente (d'après la relation $\alpha + i + r = \frac{\pi}{2}$).

Ainsi, $i_0 < i_{0,\text{lim}} \iff i > i_{\text{lim}}$ et il y a réflexion totale en J . La valeur $i_{0,\text{lim}}$ est effectivement la valeur maximale de i_0 pour laquelle il y a réflexion totale en J .



Application 3

1. Le triangle AOB est isocèle en O donc $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = r$ (voir figure en page suivante).

D'après la loi de la réflexion en B : $\widehat{OBC} = \widehat{OBA} = r$.

Le triangle BOC est également isocèle en O : $\widehat{OCB} = \widehat{OBC} = r$.

On pose r' l'angle de réfraction en C . On écrit les lois de la réfraction en A et C : $\sin i = n \sin r$ et $n \sin r = \sin r'$. On conclut que :

$$\sin r' = \sin i \iff \boxed{r' = i}$$

2. On utilise le même type de raisonnements que dans l'exemple 1.3.

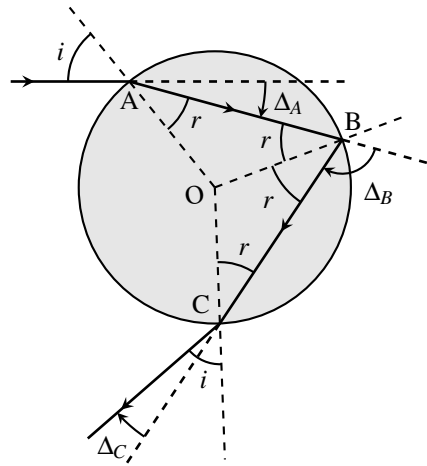
La déviation par réfraction en A vaut : $\boxed{\Delta_A = i - r}$.

La déviation par réflexion en B vaut : $\boxed{\Delta_B = \pi - 2r}$.

La déviation par réfraction en C vaut : $\boxed{\Delta_C = i - r}$.

3. On trouve immédiatement : $\boxed{\Delta = \pi + 2i - 4r}$.

4. On calcule d'abord : $r = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) = 32^\circ$ et on en déduit : $\boxed{\Delta = 142^\circ}$.



En général on préfère utiliser les radians quand on exprime les angles dans un calcul littéral (ici π plutôt que 180°), car il s'agit de l'unité SI des angles. Cependant au moment de l'application numérique on préfère généralement donner la valeur en degrés car c'est plus "parlant", notamment si on veut faire un schéma.

En cas d'applications numériques successives (comme ici pour l'angle r), il est préférable de **garder les résultats intermédiaires exacts en mémoire dans la calculatrice**. Cela évite d'enchaîner les arrondis, qui peuvent dégrader la précision du résultat final.

5. On a $r = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)$ d'après la loi de la réfraction et $i = \arcsin(\sin i)$ donc l'angle de déviation s'écrit en fonction de x sous la forme : $\boxed{\Delta = \pi + 2 \arcsin(x) - 4 \arcsin\left(\frac{x}{n}\right)}$.

On dérive la fonction $x \mapsto \Delta(x)$ en s'aidant du formulaire : $\Delta'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{n\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}}$.

On détermine si la dérivée s'annule :

$$\Delta'(x) = 0 \iff n\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}} = 2\sqrt{1-x^2} \iff n^2 - x^2 = 4(1-x^2) \iff x^2 = \frac{4-n^2}{3}$$

On conclut que $x \mapsto \Delta(x)$ est extrémale pour $x = x_m = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$.

4. Les applications numériques donnent : $x_m = 0,862$, $\boxed{i_m = 60^\circ}$ et $\boxed{\Delta = 137^\circ}$.

Exercice 1 : Réfraction dans un prisme

1. Le rayon arrive sous incidence normale sur le dioptré AB , donc **il est réfracté sans être dévié**. Le rayon réfléchi subit une déviation de 180° .

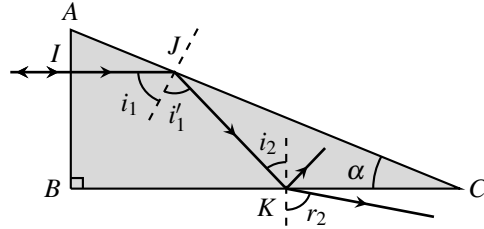
2. Le rayon qui atteint le dioptré AC se dirige vers un milieu moins réfringent ($n_{\text{air}} < n$). On détermine l'angle d'incidence i_1 sur le dioptré AC (voir figure en page suivante).

On remarque d'abord que $\widehat{AJI} = \widehat{ACB} = \alpha$.

On en déduit que $i_1 = 90 - \alpha = 65,0^\circ$.

On calcule ensuite l'angle de réflexion totale sur ce dioptré : $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = 41^\circ$.

On constate que $i_1 > i_{\text{lim}}$: **il y a réflexion totale sur l'hypoténuse**.



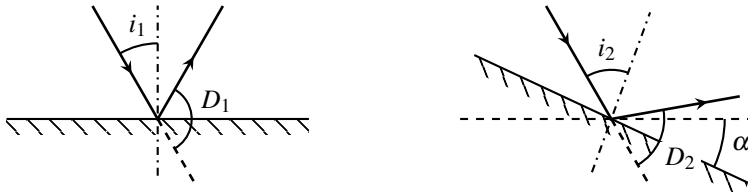
3. On calcule l'angle d'incidence i_2 sur le dioptré BC en sommant les angles du triangle JKC :

$$\frac{\pi}{2} - i'_1 + \frac{\pi}{2} + i_2 + \alpha = \pi \iff i_2 = i'_1 - \alpha$$

D'après la loi de la réflexion en J : $i'_1 = i_1$ donc $i_2 = i_1 - \alpha = 40^\circ$. On a $i_2 < i_{\text{lim}}$ au point K donc **il y a réfraction à travers le dioptré BC**. On calcule la direction du rayon réfracté : $r_2 = \arcsin(n \sin i_2) = 78^\circ$.

Exercice 2 : Rotation d'un miroir plan

On représente schématiquement les deux situations. On note D_1 et D_2 les angles de déviation.



Dans la première situation la déviation angulaire vaut $D_1 = \pi - 2i_1$. Après rotation du miroir l'angle d'incidence a augmenté de α : $i_2 = i_1 + \alpha$ et le nouvel angle de déviation est égal à $D_2 = \pi - 2(i_1 + \alpha) = D_1 - 2\alpha$. La rotation du rayon réfléchi suite au pivotement du miroir s'obtient en comparant les deux angles de déviation : $\boxed{\beta = D_1 - D_2 = 2\alpha}$.

Exercice 3 : Déviation par un système de deux miroirs

1. On oriente les angles de déviation dans le sens trigonométrique. En I et J ils valent $\boxed{D_I = \pi - 2i}$ et

$$\boxed{D_J = \pi - 2j}.$$

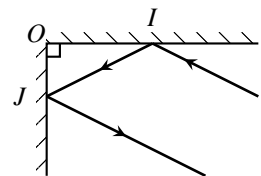
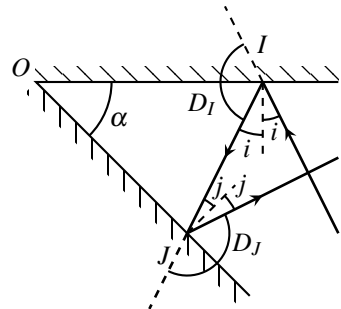
2. On somme les angles du triangle AIJ :

$$\alpha + \frac{\pi}{2} - i + \frac{\pi}{2} - j = \pi \iff \boxed{\alpha = i + j}$$

3. La déviation totale vaut :

$$D = D_I + D_J = 2\pi - 2i - 2j \iff \boxed{D = 2(\pi - \alpha)}$$

4. Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$ alors $D = \frac{3\pi}{2}$. Le rayon émergent est **orthogonal** au rayon incident (voir figure ci-dessus). Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ alors $D = \pi$. Le rayon émergent est **parallèle** au rayon incident, mais se propage **en sens opposé** (voir figure ci-contre).

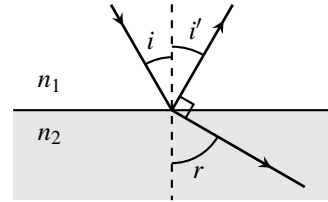


Exercice 4 : Incidence de Brewster

On applique les lois de la réflexion et de la réfraction : $r' = i$ et $n_1 \sin i = n_2 \sin r$. Puisque les rayons réfléchi et réfracté sont orthogonaux alors $r' + r = i + r = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit que : $n_1 \sin i = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - i \right) = n_2 \cos i$.

L'angle d'incidence vaut : $i = \arctan \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$.

**Exercice 5 : Déviation par un dioptre**

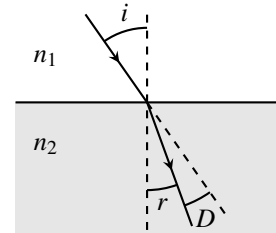
On cherche la valeur de i qui permet d'obtenir une déviation D donnée. L'angle de déviation vaut $D = i - r$.

D'après la loi de la réfraction on a $n_1 \sin i = n_2 \sin(i - D)$.

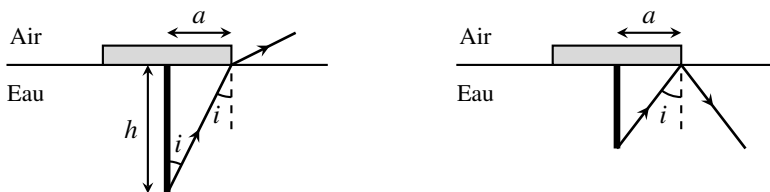
On développe l'expression à l'aide d'une identité trigonométrique : $n_1 \sin i = n_2 (\sin i \cos D - \cos i \sin D)$.

Après factorisation on isole i et on obtient $\tan i = \frac{n_2 \sin D}{n_2 \cos D - n_1}$.

L'application numérique donne $i = 19,6^\circ$.

**Exercice 6 : Bouchon de liège**

L'épingle est visible si la lumière qu'elle diffuse arrive à pénétrer dans l'air pour atteindre l'observateur. Pour ce faire elle doit traverser le dioptre eau-verre par réfraction. Celle-ci n'est pas garantie car l'air est moins réfringent que l'eau ($n_{\text{air}} < n_{\text{eau}}$) donc il pourrait y avoir **réflexion totale** (dans ce cas la lumière est réfléchiée vers le fond du récipient sans pénétrer dans l'air). On trace ci-dessous deux figures représentant des situations où la pointe de l'épingle soit visible de l'extérieur, soit invisible.



Notons que, parmi tous les points de l'épingle et tous les points d'incidence à la surface de l'eau possibles, l'angle d'incidence sur le dioptre eau-air est minimal pour un rayon issu de la pointe de l'épingle et passant par le bord du bouchon. L'épingle est donc invisible tant que l'angle i représenté sur les figures ci-dessus est strictement supérieur à l'angle de réflexion totale : $i > \arcsin(1/n)$.

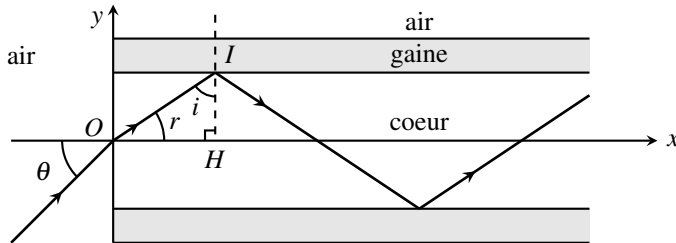
On relie $\sin i$ à h et a en utilisant une relation de trigonométrie et le théorème de Pythagore : $\sin i = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}$. On réécrit la condition de réflexion totale en fonction du paramètre h :

$$i > \arcsin \left(\frac{1}{n} \right) \iff \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} > \frac{1}{n} \iff h < a\sqrt{n^2 - 1}$$

La hauteur maximale pour que l'épingle soit invisible est $h_{\text{max}} = a\sqrt{n^2 - 1}$.

Exercice 7 : Fibre optique à saut d'indice

1. Le rayon se propage dans la fibre optique à condition de subir une **réflexion totale** à chaque fois qu'il rencontre le dioptré cœur-gaine (dans le cas contraire une partie de l'énergie lumineuse est réfractée à chaque fois que le rayon atteint la gaine, si bien que l'énergie lumineuse devient quasi-nulle après une courte propagation dans la fibre). On représente schématiquement la situation.



Il y a réflexion totale en I à condition que i soit supérieur à l'angle de réflexion totale pour le dioptré cœur-gaine : $i > i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_g}{n_c}\right)$.

On se place dans le cas limite : $i = i_{\text{lim}}$ et $\theta = \theta_L$.

Dans le triangle OIH rectangle en H , $r = \frac{\pi}{2} - i_{\text{lim}}$.

On applique la loi de la réfraction en O : $\sin \theta_L = n_c \sin r = n_c \cos\left(\arcsin\left(\frac{n_g}{n_c}\right)\right) = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$.

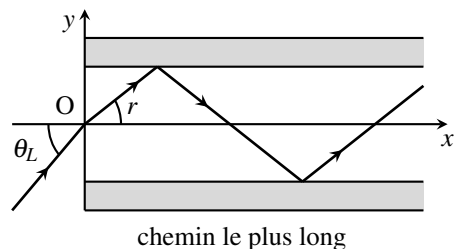
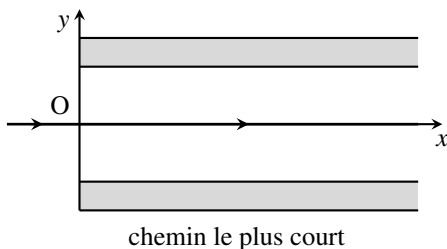
On conclut que la valeur limite de θ vaut : $\theta_L = \arcsin\left(\sqrt{n_c^2 - n_g^2}\right) = 12,22^\circ$.

En partant du cas limite, imaginons que θ diminue. Alors r diminue (loi de la réfraction) et i augmente (car $i = \frac{\pi}{2} - r$). Ainsi, $\theta < \theta_L \iff i > i_{\text{lim}}$: il y a réflexion totale dans la fibre à condition que $\theta < \theta_L$.

Remarque : dans le cas d'une fibre rectiligne l'angle d'incidence i est le même à chaque fois que le rayon rencontre le dioptré cœur-gaine. Par conséquent il suffit que la première réflexion soit totale pour que toutes les autres le soient aussi.

2. La célérité de la lumière étant fixée dans le cœur, ($v = c/n_c$), le rayon qui traverse le plus rapidement la fibre est celui qui suit le plus court chemin (voir figure ci-dessous). Il s'agit du rayon qui entre dans la fibre sous incidence normale $\theta = 0$ et parcourt la fibre en ligne droite en restant confondu avec l'axe (Ox).

La distance parcourue est alors égale à L et $T_1 = \frac{L}{v} = n_c \frac{L}{c}$.



3. Le rayon qui met le plus de temps à traverser la fibre est celui qui est le plus incliné par rapport à l'axe (Ox), c'est-à-dire celui qui entre dans la fibre sous l'angle θ_L . L'inclinaison du rayon est égale à r , si bien que celui-ci parcourt une longueur totale $\frac{L}{\cos r}$ entre les deux

extrémités de la fibre, avec $\cos r = \sin i_{\text{tot}} = \frac{n_g}{n_c}$. Ainsi : $T_2 = \frac{1}{v} \times \frac{L}{\cos r} = \Leftrightarrow T_2 = \frac{n_c^2}{n_g} \cdot \frac{L}{c}$.

4. D'après les résultats précédents : $\delta T = n_c \frac{L}{c} \left(\frac{n_c}{n_g} - 1 \right)$ avec $\frac{n_c}{n_g} = \frac{1}{\sqrt{1-2\Delta}} \simeq 1 + \Delta$.

On trouve alors que $\delta T = n_c \Delta \frac{L}{c} = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ s}$.

5. Pour éviter le recouvrement de deux impulsions successives avant la sortie de la fibre il faut que celles-ci soient séparées d'au moins δT à l'entrée. La fréquence maximale qui évite le recouvrement est $f_{\text{max}} = \frac{1}{\delta T} = 2,0 \text{ MHz}$.