

Correction du DNS 1

EXERCICE 1

$$1) \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{6+3+2}{6}}{\frac{15+12+10}{60}} = \frac{\frac{11}{6}}{\frac{37}{60}} = \frac{11}{6} \frac{60}{37} = \frac{110}{37}.$$

$$2) 2^{12} 9^5 12^{-6} = \frac{2^{12} 9^5}{12^6} = \frac{2^{12} 3^{10}}{2^{12} 3^6} = 3^4 = 81.$$

$$3) \frac{(4 - 3\sqrt{5})(1 + \sqrt{5})}{2 + \sqrt{5}} = \frac{-11 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} = \frac{(-11 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})}{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} = \frac{-27 + 13\sqrt{5}}{4 - 5} = 27 - 13\sqrt{5}.$$

$$4) \ln 72 + \ln \frac{1}{12} - \ln 3 = \ln \frac{72}{12 \times 3} = \ln \frac{72}{36} = \ln 2.$$

EXERCICE 2

1) Pour tout x différent de 0, -1 , et -2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} &= \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x+2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x+2} \\ &\Leftrightarrow x(x+1) = x+2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + x = x+2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2) Pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+1}^2 = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 \text{ (tout est positif)} \\ &\Leftrightarrow x+1 = x + \sqrt{x} + \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{9}{16}. \end{aligned}$$

3) Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \ln(x+1) - \ln x &= 1 \Leftrightarrow \ln \frac{x+1}{x} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = e \\ &\Leftrightarrow x+1 = ex \\ &\Leftrightarrow (1-e)x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{e-1}. \end{aligned}$$

EXERCICE 3

1) Montrons par récurrence que $S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

C'est vrai pour $n = 1$ puisque $S_1 = 1$ et que $2 - \frac{1}{1} = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ et montrons que $S_{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}$. On a :

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Comparons cette dernière quantité avec $2 - \frac{1}{n+1}$:

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} \leq 0,$$

donc $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$ et donc on a bien $S_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$.

Le théorème de récurrence permet de conclure que $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) D'après ce qui précède, on a $S_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la suite (S_n) est majorée.

De plus, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la suite (S_n) est croissante.

On en déduit que la suite (S_n) est convergente (on peut montrer que sa limite est $\frac{\pi^2}{6}$ mais c'est une autre histoire).

EXERCICE 4

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{P}$ au point M est $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = x_1 + x_2$.

Or le coefficient directeur de la droite (M_1M_2) est $\frac{y_{M_2} - y_{M_1}}{x_{M_2} - x_{M_1}} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2$ également.

Les droites (M_1M_2) et T sont donc parallèles.

EXERCICE 5

Étudions les variations de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x^2 - 2x - 8)$.

Les racines de ce polynôme du second degré sont -2 et 4 , donc $f'(x)$ est négatif lorsque $-2 \leq x \leq 4$ et positif ailleurs. On dresse alors le tableau de variations de f , dans lequel on ajoute les valeurs $f(-2) = a + 28$ et $f(4) = a - 80$ et les limites $(-\infty \text{ en } -\infty \text{ et } +\infty \text{ en } +\infty)$.

En observant ce tableau de variations, on en déduit que :

- si $a < -28$ alors l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution réelle,
- si $a = -28$ alors l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions réelles,
- si $-28 < a < 80$ alors l'équation $f(x) = 0$ a trois solutions réelles,
- si $a = 80$ alors l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions réelles,
- si $a > 80$ alors l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution réelle.