

Devoir n°4 (non surveillé)

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$.

EXERCICE 2

Soient $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $Z = \frac{z_1^2}{z_2}$.

- 1) Écrire Z sous forme algébrique.
- 2) Écrire z_1 , z_2 et Z sous forme exponentielle.
- 3) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et de $\sin \frac{5\pi}{12}$.

EXERCICE 3 - Autour de la somme harmonique

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- 1) Écrire un programme en Python qui affiche une valeur approchée de $H_{1000000}$.
- 2) a) Montrer que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
b) Montrer que la suite de terme général $H_{2n} - H_n$ est strictement croissante.
c) En déduire que la suite (H_n) ne peut pas être convergente. On admettra que si (H_n) converge vers un réel ℓ , alors la suite (H_{2n}) converge aussi vers ℓ .
- 3) a) Étudier sur $]1, +\infty[$ les fonctions $f : x \mapsto \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \ln x - \ln(x-1) - \frac{1}{x}$ et dresser leurs tableaux de variation en précisant leurs limites en 1 et en $+\infty$.
b) En déduire que, pour tout $x > 1$, on a $\ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x} \leq \ln x - \ln(x-1)$.
c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'encadrement $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$ et retrouver le résultat de la question 2)c).
- 4) Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On pose $S_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k(k+n)}$.
a) Trouver deux réels a et b indépendants de k tels que $\frac{1}{k(k+n)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+n}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
b) En déduire que $S_p = \frac{H_n + H_p - H_{n+p}}{n}$.
c) En utilisant l'encadrement obtenu à la question 3)b), montrer que $H_{n+p} - H_p$ tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$ et en déduire la limite de S_p lorsque p tend vers $+\infty$.