

Correction du DNS 2

EXERCICE 1

On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe deux entiers a et b tels que $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$. En mettant au carré on a alors $3 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2$.

Si a et b sont non nuls on en déduit que $\sqrt{2} = \frac{3 - a^2 - 2b^2}{2ab}$ et donc que $\sqrt{2}$ est rationnel : impossible.

Si b est nul alors $\sqrt{3} = a$ est un entier : impossible.

Enfin si a est nul alors $3 = 2b^2$ est pair : impossible.

Dans tous les cas on aboutit à une contradiction. Par conséquent on ne peut pas écrire $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ avec a et b entiers.

EXERCICE 2

On utilise la linéarité de la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n k(n-k) &= \sum_{k=0}^n (kn - k^2) \\ &= n \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^n k^2 \\ &= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{3n^2(n+1) - n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(3n - (2n+1))}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{6}.\end{aligned}$$

EXERCICE 3

C'est une somme triangulaire, il vaut mieux sommer d'abord sur i puis sur j :

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j(j+1)} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i^2}{j(j+1)} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^j i^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n (2j+1) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n j + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n 1 \\ &= \frac{1}{3} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{6} \\ &= \frac{n(n+2)}{6}.\end{aligned}$$

EXERCICE 4

1) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = 1 - \cos x$. Ainsi f' est positive et ne s'annule qu'en $2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{N}$), donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $f(0) = 0$, donc f est à valeurs positives (et ne s'annule qu'en 0).

b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = x - \sin x = f(x)$. Or f est positive et ne s'annule qu'en 0, donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus $g(0) = 0$, donc g est à valeurs positives (et ne s'annule qu'en 0).

c) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $h'(x) = -1 + x^2/2 + \cos x = g(x)$. Or g est positive et ne s'annule qu'en 0, donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus $h(0) = 0$, donc h est à valeurs positives (et ne s'annule qu'en 0).

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a, d'après ce qui précède, $x - \sin x \geq 0$ et $-x + x^3/6 + \sin x \geq 0$, d'où $x \geq \sin x$ et $\sin x \geq x - x^3/6$, ce qui fournit l'encadrement demandé.

2) Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on a, d'après la question précédente (en remplaçant x par $\frac{k}{n^2}$) :

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leq \sin \frac{k}{n^2} \leq \frac{k}{n^2}$$

donc en sommant on obtient

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \right) \leq \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

soit

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 \leq \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k.$$

3) On a

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1+1/n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

et

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n^2(n+1)^2}{24n^6} = \frac{1+1/n}{2} - \frac{1+2/n+1/n^2}{24n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (S_n) converge vers $\frac{1}{2}$ également.