

Devoir n°5 (non surveillé)

EXERCICE 1

Montrer que $\cos \frac{\pi}{17} + \cos \frac{3\pi}{17} + \cos \frac{5\pi}{17} + \dots + \cos \frac{15\pi}{17} = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 - (5 + i)z^4 + 4 + 4i = 0$.

EXERCICE 3

1) Soit le nombre complexe $u = 1 + i$. Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = u^n + \bar{u}^n$.

- a) Mettre u et $\bar{u}$ sous forme trigonométrique.
- b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et θ_n à préciser tels que $S_n = a_n \cos \theta_n$.
- c) Pour quelles valeurs de n a-t-on $S_n = 0$?
- d) Montrer que, si n est pair, alors S_n est un entier.

2) Soit m un entier naturel.

- a) Développer $(1 + i)^{2m}$ et $(1 - i)^{2m}$ à l'aide de la formule du binôme.
- b) Soit p un entier naturel. Simplifier $i^{2p+1} + (-i)^{2p+1}$ et $i^{2p} + (-i)^{2p}$.

c) Déduire des questions précédentes que $\sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{2m}{2p} = 2^m \cos \frac{m\pi}{2}$.

EXERCICE 4

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit z un nombre complexe. On considère les points A , B et M d'affixes respectives 1 , i et z . Soit N l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$. Soient P , Q , R et S les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BM]$, $[MN]$ et $[NA]$.

- 1) Quelles sont les affixes des points N , P , Q , R et S ?
- 2) Montrer que le quadrilatère $PQRS$ est un carré.
- 3) On pose $z = \rho e^{i\theta}$ où ρ est un réel strictement positif fixé et θ varie dans $\mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de θ l'aire du carré $PQRS$ est-elle maximale?