

Correction du DNS 4

EXERCICE 1

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\cos x + \cos(3x) = \cos(2x) &\Leftrightarrow 2 \cos \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} = \cos(2x) \\ &\Leftrightarrow 2 \cos(2x) \cos x = \cos(2x) \\ &\Leftrightarrow 2 \cos(2x) \cos x - \cos(2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(2x)(2 \cos x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \text{ ou } \cos x = 1/2 \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \pi/2 + k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}, x = \pi/3 + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}, x = -\pi/3 + 2k\pi) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, x = \pi/4 + k\pi/2) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}, x = \pi/3 + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}, x = -\pi/3 + 2k\pi).\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\{\pi/4 + k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi/3 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\pi/3 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

EXERCICE 2

1) On a :

$$Z = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{(-2+2i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})} = \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}+i(2\sqrt{6}+2\sqrt{2})}{4} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}.$$

2) On a facilement $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ et $\sqrt{2}+i\sqrt{2} = 2e^{i\pi/4}$ donc $Z = \frac{4e^{2i\pi/3}}{2e^{i\pi/4}} = 2e^{5i\pi/12}$.

3) Par identification des parties réelle et imaginaire de Z trouvées en 1) et en 2) on obtient

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

EXERCICE 3

1) Voilà un programme possible :

```
somme = 0
for k in range(1, 1000001):
    somme = somme + 1/k # ou somme += 1/k
print(somme)
```

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$, donc la suite (H_n) est strictement croissante.

b) Posons $u_n = H_{2n} - H_n$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= H_{2n+2} - H_{n+1} - (H_{2n} - H_n) \\ &= H_{2n+2} - H_{2n} - (H_{n+1} - H_n) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0\end{aligned}$$

donc la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Raisonnons par l'absurde : supposons que la suite (H_n) est convergente. Notons ℓ sa limite. Alors la suite de terme général H_{2n} tend aussi vers ℓ , et donc la suite de terme général $H_{2n} - H_n$ tend vers 0. Or cette suite est positive et strictement croissante (d'après le b)) donc elle ne peut pas tendre vers 0 : contradiction.

La suite (H_n) n'est donc pas convergente.

3) a) Les fonctions f et g sont dérivables sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x > 1$ on a

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$$

et

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2(x-1)} < 0$$

donc f est strictement croissante et g strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

On a sans difficultés $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln 2 - 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$.

On a également $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right) = 0$.

De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) - \frac{1}{x} \right) = 0$.

b) D'après la question précédente f est négative et g est positive sur $]1, +\infty[$.

Pour tout $x > 1$ on a donc $\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} \leq 0$ et $\ln x - \ln(x-1) - \frac{1}{x} \geq 0$, soit

$$\ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x} \leq \ln x - \ln(x-1).$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on a $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$, donc $\sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, ce qui donne $\ln(n+1) \leq H_n$ (la première somme est télescopique).

D'autre part on a $\frac{1}{k} \leq \ln k - \ln(k-1)$ pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, donc $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n (\ln k - \ln(k-1))$, d'où après télescopage $H_n - 1 \leq \ln n$ et donc $H_n \leq \ln n + 1$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$ également.

4) a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+n} = \frac{a(k+n) + bk}{k(k+n)} = \frac{(a+b)k + an}{k(k+n)}$. Pour avoir $(a+b)k + an = 1$ il suffit que $\begin{cases} a+b=0 \\ an=1 \end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} b=-1/n \\ a=1/n \end{cases}$. On a donc

$$\frac{1}{k(k+n)} = \frac{1}{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \frac{1}{k+n}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

b) On a donc :

$$\begin{aligned} S_p &= \sum_{k=1}^p \frac{1}{k(k+n)} \\ &= \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \frac{1}{k+n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^p \frac{1}{k+n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{k} - \left(\sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} (H_p - (H_{n+p} - H_n)) \\ &= \frac{H_n + H_p - H_{n+p}}{n}. \end{aligned}$$

c) On a $H_{n+p} - H_p = \sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} = \sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{1}{k}$ donc en procédant comme en 4)b) on a

$$\sum_{k=p+1}^{n+p} (\ln(k+1) - \ln k) \leq H_{n+p} - H_p \leq \sum_{k=p+1}^{n+p} (\ln k - \ln(k-1))$$

soit après télescopage

$$\ln(n+p+1) - \ln(p+1) \leq H_{n+p} - H_p \leq \ln(n+p) - \ln p.$$

Or

$$\ln(n+p+1) - \ln(p+1) = \ln \frac{n+p+1}{p+1} = \ln \left(1 + \frac{n}{p+1} \right) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

et

$$\ln(n+p) - \ln(p) = \ln \frac{n+p}{p} = \ln \left(1 + \frac{n}{p} \right) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

donc d'après le théorème des gendarmes $H_{n+p} - H_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_p = \frac{H_n}{n}$.