

Devoir n°6 (non surveillé)

EXERCICE 1

Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x ; \quad g(x) = x^2 e^x ; \quad h(x) = \ln \frac{1+2x}{2-x} ; \quad i(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

$$j(x) = \sqrt{\sin x} ; \quad k(x) = \operatorname{ch}^3(x) ; \quad \ell(x) = \operatorname{ch}(x^3) ; \quad m(x) = \operatorname{ch}(\operatorname{ch}(\operatorname{ch}(x))).$$

On précisera leurs ensembles de dérivabilité (en justifiant rapidement) et on s'efforcera de mettre les résultats sous une forme qui permettrait ensuite d'étudier facilement leurs signes (mais cette étude n'est pas demandée).

EXERCICE 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - \frac{4e^x}{e^x + 1}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation en précisant ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Rappel : la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.

a) Déterminer la limite de $f(x) - x + 4$ en $+\infty$. En déduire une asymptote de $\mathcal{C}$.

b) Déterminer la limite de $f(x) - x$ en $-\infty$. En déduire une autre asymptote de $\mathcal{C}$.

c) Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à ses asymptotes.

3) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4) Tracer $\mathcal{C}$ en faisant apparaître les éléments étudiés précédemment. Tracer dans le même repère la courbe représentative de f^{-1} .

EXERCICE 3

1) a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln x - x + 1$. On précisera la valeur de son maximum.

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x - 1$.

2) Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels strictement positifs.

a) Appliquer le résultat démontré en 1)b) aux réels $\frac{na_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \frac{na_2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \dots, \frac{na_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$,

et, en additionnant membre à membre les inégalités obtenues, établir **l'inégalité arithmético-géométrique** :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Dans quel cas y a-t-il égalité ?

b) En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique aux réels $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$, établir **l'inégalité géométrico-harmonique** :

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$