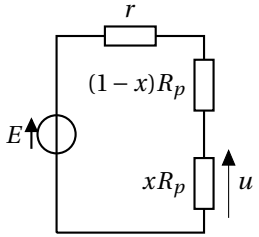
Corrigé DM6

Exercice : Potentiomètre

1. Tant que la lampe est éteinte elle se comporte comme un interrupteur ouvert. On détermine la tension u à l'aide de la loi du pont diviseur de tension :

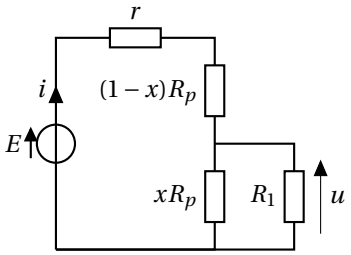


$$u = \frac{xR_p}{r+R_p}E \iff x = \left(1+\frac{r}{R_p}\right)\frac{u}{E}$$

On établit la condition pour laquelle la lampe reste éteinte. On note $U_a = 2\text{V}$ la tension minimale d'allumage :

$$u < U_a \iff \boxed{x < \left(1+\frac{r}{R_p}\right)\frac{U_a}{E} = 0{,}26}$$

2. La lampe est allumée, elle se comporte comme une résistance R_1. La puissance qu'elle reçoit vaut $\mathscr{P}_\ell = \frac{u^2}{R_1}$.



Pour calculer u on rassemble les résistances R_1 et xR_p en dérivation, puis on applique la loi du pont diviseur de tension :

$$R_{\text{eq}} = \frac{xR_pR_1}{xR_p+R_1} \quad \text{et} \quad u = \frac{R_{\text{eq}}}{r+(1-x)R_p+R_{\text{eq}}}E$$

On trouve enfin que $\boxed{\mathscr{P}_\ell = \left(\frac{R_{\text{eq}}}{r+(1-x)R_p+R_{\text{eq}}}\right)^2\frac{E^2}{R_1} = 1{,}5\text{W}}$.

La puissance fournie par le générateur vaut $\mathscr{P}_g = Ei$ avec i que l'on obtient grâce à la loi des mailles :

$$i = \frac{E}{r+(1-x)R_p+R_{\text{eq}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathscr{P}_g = \frac{E^2}{r+(1-x)R_p+R_{\text{eq}}} = 10\text{W}}$$

Le rendement énergétique vaut $\boxed{\eta = \mathscr{P}_\ell/\mathscr{P}_g = 15\,\%}$.

3. Le rendement énergétique s'écrit $\eta = \frac{\mathscr{P}_\ell}{\mathscr{P}_g} = \frac{u^2}{R_1}\times\frac{1}{Ei}$. Dans le cas $x = 1$:

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1R_p}{R_1+R_p} \quad ; \quad u = \frac{R_{\text{eq}}}{r+R_{\text{eq}}}E \quad ; \quad i = \frac{E}{r+R_{\text{eq}}}$$

On exprime $1/\eta$ en fonction de R_{eq} :

$$\frac{1}{\eta} = \frac{R_1}{r+R_{\text{eq}}}\left(\frac{r+R_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}}}\right)^2 = \frac{R_1(r+R_{\text{eq}})}{R_{\text{eq}}^2} = \frac{R_1}{R_{\text{eq}}}\left(1+\frac{r}{R_{\text{eq}}}\right)$$

En remplaçant R_{eq} par son expression on aboutit à :

$$\frac{1}{\eta} = \left(1+\frac{R_1}{R_p}\right)\left(1+r\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_p}\right)\right) \iff \boxed{\eta = 1+\frac{2r}{R_p}+\frac{R_1}{R_p}\left(1+\frac{r}{R_p}\right)+\frac{r}{R_1}}$$

4. Le rendement énergétique est maximal lorsque la fonction $R_1 \mapsto f(R_1) = \frac{R_1}{R_p}\left(1+\frac{r}{R_p}\right)+\frac{r}{R_1}$ est minimale. On détermine la valeur de R_1 correspondante :

$$f'(R_m) = 0 \iff \frac{1}{R_p}\left(1+\frac{r}{R_p}\right)-\frac{r}{R_m^2} = 0 \iff \boxed{R_m = \sqrt{\frac{rR_p}{1+\frac{r}{R_p}}} = 4{,}8\,\Omega}$$

Le rendement énergétique est maximal lorsque $R_1 = 4{,}8\,\Omega$. Lorsque la lampe chauffe sa résistance, initialement égale à $6\,\Omega$, augmente. On s'éloigne donc du rendement maximal. **L'échauffement de la lampe contribue à diminuer le rendement énergétique**.