Devoir n°7 (non surveillé)

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(3x)\cos^3(x).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) Étudier la parité de f et montrer que f est π-périodique. Expliquer alors pourquoi il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ pour tracer $\mathcal{C}$.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = -3\cos^2(x)\sin(4x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.

3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.

4) Tracer $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

EXERCICE 2

Le but de l'exercice est de montrer de deux manières différentes que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Arccos}\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\operatorname{Arctan}|x|. \qquad (*)$$

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

1) Justifier que les deux membres de l'égalité sont bien définis pour tout réel x.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \operatorname{Arccos}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

a) Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

b) Étudier la parité de f.

c) Sur quel intervalle la fonction Arccos est-elle dérivable ? En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

d) Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$. On simplifiera au maximum le résultat.

e) En déduire $(*)$.

3) Soit t un réel non congru à $\pi/2$ modulo π.

a) Redémontrer les formules de trigonométrie $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ et $\dfrac{1}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)$.

b) En déduire que $\cos(2t) = \dfrac{1-\tan^2(t)}{1+\tan^2(t)}$.

c) En déduire à nouveau $(*)$.