Corrigés

Application 1

1. Loi des mailles : $E = u_R + u_L$.

Loi d'Ohm : $u_R = Ri$.

Loi de la bobine : $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

On trouve que : $E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}}$.

On compare cette équation à la forme canonique : $\frac{i}{\tau} = \frac{R}{L}i \iff \boxed{\tau = \frac{L}{R}}$.

2. Solution particulière : $\frac{R}{L}i_p = \frac{E}{L} \iff i_p = \frac{E}{R}$.

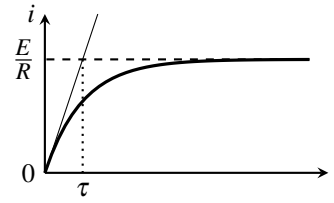
Solution générale : $i(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$.

Condition initiale : Initialement l'intensité est nulle : $i(0^-) = 0$.

L'intensité dans la branche d'une bobine est continue : $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

On trouve la constante d'intégration : $i(0^+) = 0 = A + \frac{E}{R} \iff A = -\frac{E}{R}$.

On conclut que $\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$.



En régime permanent $(t \to +\infty)$, l'intensité vaut $\boxed{\frac{E}{R}}$.

On trace le graphe de $i(t)$ sur la figure ci-contre.

3. Le travail électrique reçu par la bobine vaut :

$$W_b = \int_0^{+\infty} \mathscr{P}_{\text{r,bob}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_m}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \mathscr{E}_m(+\infty) - \mathscr{E}_m(0)$$

avec $\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}Li^2$. Sachant que $i(0) = 0$ et $i(+\infty) = \frac{E}{R}$, on conclut que $\boxed{W_b = \frac{LE^2}{2R^2}}$.

4. En régime permanent la puissance reçue par le résistor vaut $\boxed{\mathscr{P}_R = Ri^2 = \frac{E^2}{R}}$.

Cette puissance est constante et non nulle, ce qui signifie qu'en régime permanent, une fois que la bobine a fini d'emmagasiner de l'énergie magnétique, **le résistor continue de dissiper de l'énergie** (contrairement au circuit *RC* série dans lequel l'intensité est nulle en régime permanent). Le circuit *RL* ne convient pas pour stocker temporairement de l'énergie.

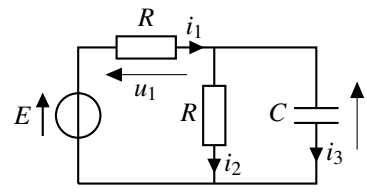
Application 2

1. On annote le schéma et on commence par appliquer la loi des mailles : $E = u + u_1$.

On cherche ensuite à exprimer u_1 en fonction de u en tirant sur le fil.

Loi du condensateur : $i_3 = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

Loi d'Ohm (branche centrale) : $i_2 = \frac{u}{R}$.



Loi des nœuds : $i_1 = i_2 + i_3 = \frac{u}{R} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

Loi d'Ohm (branche de gauche) : $u_1 = Ri_1 = u + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

On revient à la loi des mailles : $E = u + u + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{2u}{RC} = \frac{E}{RC}}$.

On identifie le temps caractéristique : $\frac{u}{\tau} = \frac{2u}{RC} \iff \boxed{\tau = \frac{RC}{2}}$.

2. Solution particulière : $\frac{2u_p}{RC} = \frac{E}{RC} \iff u_p = \frac{E}{2}$.

Solution générale : $u(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{2}$.

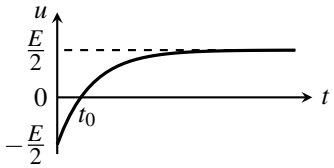
Condition initiale : D'après l'énoncé : $u(0^-) = -E$.

L'intensité dans la branche d'une bobine est continue : $u(0^+) = u(0^-) = -\frac{E}{2}$.

On trouve la constante d'intégration : $u(0^+) = -\frac{E}{2} = A + \frac{E}{2} \iff A = -E$.

On conclut que $u(t) = -E\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{2} \iff \boxed{u(t) = \frac{E}{2}\left(1 - 2\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$.

On trace le graphe de $u(t)$ sur la figure ci-contre.



3. Le travail électrique reçu par le condensateur vaut :

$$W_c = \int_0^{+\infty} \mathscr{P}_{\mathrm{r,cond}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_e}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \mathscr{E}_e(+\infty) - \mathscr{E}_e(0)$$

avec $\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}Cu^2$. Sachant que $u(0) = -\frac{E}{2}$ et $u(+\infty) = \frac{E}{2}$, on conclut que $\boxed{W_c = 0}$.

Au cours de ce régime transitoire le condensateur se décharge (jusqu'à la date t_0 pour laquelle u s'annule), puis se recharge avec une tension opposée à sa valeur initiale. Le travail fourni au cours de la décharge est exactement compensé par le travail reçu au cours de la recharge.

4. On note $t_0 = 0,52\,\mathrm{ms}$ la date à laquelle la tension u s'annule :

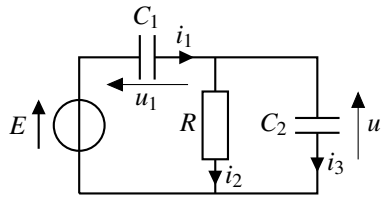
$$u(t_0) = \frac{E}{2}\left(1 - 2\mathrm{e}^{-t_0/\tau}\right) = 0 \iff e^{-t_0/\tau} = \frac{1}{2} \iff \frac{t_0}{\tau} = \ln 2$$

Sachant que $\tau = \frac{RC}{2}$, on aboutit à : $\boxed{C = \frac{2t_0}{R\ln 2} = 5\,\mu\mathrm{F}}$.

Application 3

On annote le schéma et on commence par appliquer la loi des mailles : $E = u_1 + u$.

On cherche ensuite à exprimer u_1 en fonction de u en tirant sur le fil.



Loi du condensateur (branche de droite) : $i_3 = C_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

Loi d'Ohm : $i_2 = \frac{u}{R}$.

Loi des nœuds : $i_1 = i_2 + i_3 = \frac{u}{R} + C_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

Loi du condensateur (branche de gauche) : $\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = \frac{i_1}{C_1} = \frac{u}{RC_1} + \frac{C_2}{C_1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

Cette dernière loi donne accès à $\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$ et non u_1.

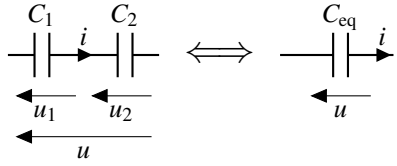
On va donc dériver la première loi des mailles par rapport au temps :

$$0 = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{RC_1} + \frac{C_2}{C_1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R(C_1+C_2)} = 0}$$

On identifie le temps caractéristique : $\frac{u}{\tau} = \frac{u}{R(C_1+C_2)} \iff \boxed{\tau = R(C_1+C_2)}$.

Exercice 1 : Associations de condensateurs et de bobines

1. Condensateurs en série : On cherche à montrer que la relation courant-tension de l'association de deux condensateurs en série est semblable à celle d'un condensateur unique :



$$i = C_{\text{eq}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \iff \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C_{\text{eq}}}$$

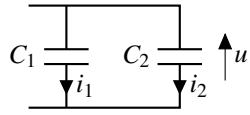
On écrit la loi des deux condensateurs : $\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C_1}$ et $\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C_2}$.

Par additivité des tensions : $u = u_1 + u_2 \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1}\right) i$.

Cette relation est semblable à celle d'un condensateur unique de capacité C_{eq} telle que :

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \iff \boxed{C_{\text{eq}} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}}$$

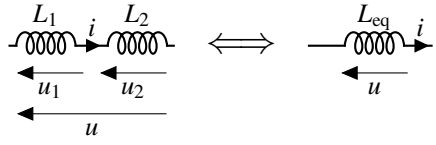
Condensateurs en dérivation : On écrit la loi des nœuds :



$$i = i_1 + i_2 = C_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + C_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \iff i = (C_1+C_2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

Pour une association de condensateurs en dérivation : $\boxed{C_{\text{eq}} = C_1 + C_2}$.

2. Bobines en série : On cherche à montrer que la relation courant-tension de l'association de deux bobines en série est semblable à celle d'une bobine unique :



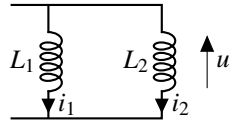
$$u = L_{\text{eq}}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \iff \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{L_{\text{eq}}}$$

On écrit la loi des deux condensateurs : $u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $u_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

Par additivité des tensions : $u = u_1 + u_2 = (L_1+L_2)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

L'inductance équivalente vaut : $\boxed{L_{\text{eq}} = L_1 + L_2}$.

Bobines en dérivation : On écrit la loi des nœuds et on dérive :



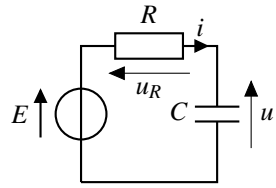
$$i = i_1 + i_2 \implies \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) u$$

Pour une association de bobines en dérivation : $\boxed{\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \iff L_{\text{eq}} = \frac{L_1L_2}{L_1+L_2}}$.

On résume les résultats dans un tableau ; ces associations sont à connaître.

	en série	en dérivation
condensateurs	$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1}$	$C_{eq} = C_1 + C_2$
bobines	$L_{eq} = L_1 + L_2$	$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$

Exercice 2 : Circuit *RC* série



1. On applique la loi des mailles : $E = u + u_R$.

D'après les lois des dipôles : $u_R = Ri = RC\frac{du}{dt}$.

On conclut que : $\boxed{\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = \frac{E}{RC}}$.

Le temps caractéristique vaut $\tau = RC$.

2. Solution particulière : $\frac{u_p}{RC} = \frac{E}{RC} \iff u_p = E$.

Solution générale : $u(t) = Ae^{-t/\tau} + E$.

Condition initiale : par continuité $u(0^+) = u(0^-) = -E$.

On en déduit que $u(0^+) = -E = A + E \iff A = -2E$.

La tension aux bornes du condensateur vaut : $\boxed{u(t) = E\left(1 - 2e^{-t/\tau}\right)}$.

D'après la loi du condensateur : $i(t) = C\frac{du}{dt} = C \times \frac{2E}{\tau}e^{-t/\tau} \iff \boxed{i(t) = \frac{2E}{R}e^{-t/\tau}}$.

3. La durée du régime transitoire vaut 5τ et doit être inférieure à $\Delta t = 0,1\,\text{ms}$. Cela impose que : $5RC < \Delta t \iff R < \frac{\Delta t}{5C} = 1\,\text{k}\Omega$.

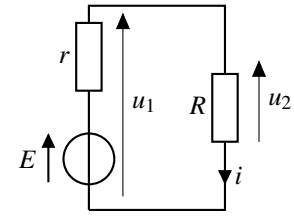
D'après l'expression de $i(t)$ l'intensité est maximale à $t = 0^+$: $i_{max} = \frac{2E}{R}$. On souhaite qu'elle soit inférieure à $i_{lim} = 50\,\text{mA}$, ce qui implique que : $\frac{2E}{R} < i_{lim} \iff R > \frac{2E}{i_{lim}} = 200\,\Omega$.

La résistance doit être choisie dans l'intervalle : $\boxed{200\,\Omega < R < 1\,\text{k}\Omega}$.

Exercice 3 : Observation expérimentale

1. La bobine impose la continuité de l'intensité, donc de $u_2 = Ri$. Par conséquent la courbe grise, discontinue en $t = 0$, ne peut pas correspondre à u_2.

La courbe noire correspond à u_2 et la courbe grise à u_1.

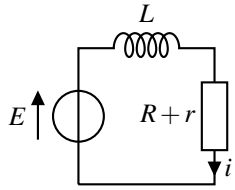


2. En régime stationnaire la bobine se comporte comme un **court-circuit**. On montre le schéma équivalent du circuit lorsque le régime permanent est atteint.

Les tensions u_1 et u_2 sont égales. On détermine leur valeur avec la loi du diviseur de tension :

$$\boxed{u_1 = u_2 = \frac{R}{R+r}E}$$

Les résistances r et R sont en série donc le circuit est équivalent à un simple RL série de résistance équivalente $R+r$. La résolution est semblable à celle de l'application 6.1 et on trouve :



$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R+r}\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R+r}$$

D'après la loi d'Ohm : $u_2 = Ri \iff \boxed{u_2 = \frac{RE}{R+r}\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$.

D'après la loi d'additivité des tensions : $u_1 = E - ri \iff \boxed{u_1 = \frac{E}{R+r}\left(R+r\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$.

4. D'après les calculs précédents, $u_1(0^+) = E$. On lit sur l'oscillogramme : $\boxed{E = 6\,\mathrm{V}}$.

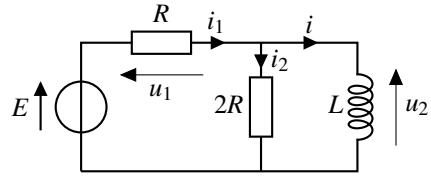
La valeur limite de u_1 et u_2 en régime permanent est : $u_\infty = \frac{RE}{R+r} \iff R = \frac{ru_\infty}{E-u_\infty}$.

On lit sur l'oscillogramme $u_\infty = 4\,\mathrm{V} \iff \boxed{R = 100\,\Omega}$.

On lit la valeur du temps caractéristique à l'aide de la tangente à l'origine : $\tau = 0,2\,\mathrm{ms}$.

On en déduit que : $\boxed{L = (R+r)\tau = 30\,\mathrm{mH}}$.

Exercice 4 : Circuit $R + R \parallel L$



1. On applique la loi des nœuds : $i_1 = i + i_2$, puis on tire sur le fil.

Loi de la bobine : $u_2 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

Loi d'Ohm (branche centrale) : $i_2 = \frac{u_2}{2R} = \frac{L}{2R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

Loi des mailles : $u_1 = E - u_2 = E - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

Loi d'Ohm (branche de gauche) : $i_1 = \frac{u_1}{R} = \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

On conclut : $\frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = i + \frac{L}{2R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{2R}{3L}i = \frac{2E}{3L}}$.

On identifie le temps caractéristique : $\frac{i}{\tau} = \frac{2R}{3L}i \iff \boxed{\tau = \frac{3L}{2R}}$.

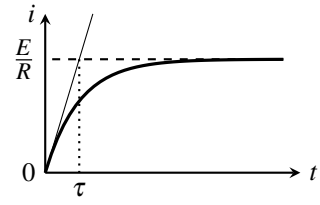
Solution particulière : $\frac{2R}{3L}i_p = \frac{2E}{3L} \iff i_p = \frac{E}{R}$.

Solution générale : $i(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$.

Condition initiale : la bobine impose la continuité de l'intensité i : $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

On en déduit que $A = -\frac{E}{R}$ puis : $\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$.

On trace le graphe de $i(t)$.

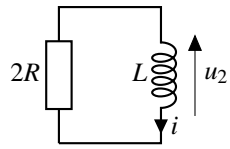


2. Le travail électrique reçu par la bobine vaut :

$$W_b = \mathscr{E}_m(+\infty) - \mathscr{E}_m(0) = \frac{1}{2}L\left(i^2(+\infty) - i^2(0)\right)$$

Sachant que $i(0) = 0$ et $i(+\infty) = \frac{E}{R}$, on trouve : $\boxed{W_b = \frac{LE^2}{2R}}$.

3. On représente le schéma une fois que l'interrupteur est ouvert.



On écrit les lois des dipôles : $u_2 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $u_2 = -2Ri$ (attention, le résistor est en convention générateur !).

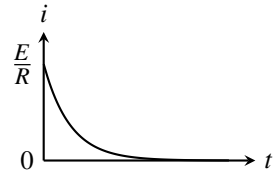
On obtient : $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -2Ri \iff \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{2R}{L}i = 0$.

Le temps caractéristique vaut : $\boxed{\tau' = \frac{L}{2R}}$.

L'équation est homogène donc il n'y a pas de solution particulière.

Solution générale : $i(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau'}$.

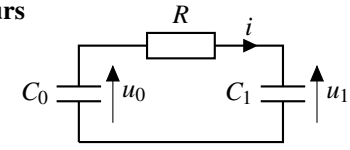
Condition initiale : Immédiatement avant d'ouvrir l'interrupteur, on est dans le régime permanent de la première phase étudiée à la question 1 : $i(0^-) = \frac{E}{R}$. Par continuité : $i(0^+) = i(0^-) = \frac{E}{R}$.



On en déduit que $A = \frac{E}{R}$ puis $\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau'}}$.

Exercice 5 : Transfert d'énergie entre deux condensateurs

1. On écrit les lois des condensateurs :



$i = -C_0\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}$ (convention générateur).

$i = C_1\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$ (convention récepteur).

On en déduit que : $C_0\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + C_1\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = 0 \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C_0u_0 + C_1u_1) = 0$.

La quantité $C_0u_0 + C_1u_1$ reste constante. Par continuité de la tension aux bornes des condensateurs : $u_0(0^+) = E$ et $u_1(0^+) = 0$ donc : $\boxed{C_0u_0 + C_1u_1 = C_0E}$.

2. On écrit la loi des mailles : $u_0 = Ri + u_1$. En régime permanent les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts donc $i = 0$. On en déduit que les tensions u_0 et u_1 sont égales. On trouve leur expression à l'aide de la relation de la question 1 :

$$(C_0 + C_1)u_{0,\infty} = C_0E \iff \boxed{u_{0,\infty} = u_{1,\infty} = \frac{C_0}{C_0+C_1}E}$$

3. L'énergie initiale stockée par C_0 vaut $\mathscr{E}_0(0) = \frac{1}{2}C_0u_0^2(0) = \frac{1}{2}C_0E^2$. En régime permanent :

• La capacité C_0 stocke l'énergie $\mathscr{E}_0(+\infty) = \frac{1}{2}C_0\left(\frac{C_0}{C_0+C_1}E\right)^2 = \frac{1}{2}C_0\frac{E^2}{(1+N)^2}$.

• La capacité C_1 stocke l'énergie $\mathscr{E}_1(+\infty) = \frac{1}{2}C_1\left(\frac{C_0}{C_0+C_1}E\right)^2 = \frac{1}{2}C_1\frac{E^2}{(1+N)^2}$.

La fraction de l'énergie initiale qui est transférée à la capacité C_1 vaut :

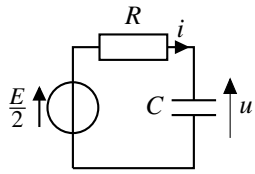
$$\boxed{\eta_1 = \frac{\mathscr{E}_1(+\infty)}{\mathscr{E}_0(0)} = \frac{N}{(1+N)^2} = 0,22}$$

La fraction de l'énergie initiale qui est conservée par la capacité C_0 vaut :

$$\boxed{\eta_0 = \frac{\mathscr{E}_0(+\infty)}{\mathscr{E}_0(0)} = \frac{1}{(1+N)^2} = 0,11}$$

Par conservation de l'énergie dans le circuit, on en déduit que la fraction de l'énergie initiale qui est dissipée par la résistance R vérifie : $\eta_0 + \eta_1 + \eta_R = 1 \iff \boxed{\eta_R = 1 - \eta_0 - \eta_1 = 0,67}$.

Exercice 6 : Optimisation de la charge d'un condensateur



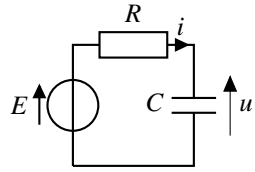
1. Première étape : Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, $u(0^+) = 0$.

On écrit la loi des mailles : $\frac{E}{2} = u + Ri$.

En régime permanent le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert donc $i(+\infty) = 0$ et $u(+\infty) = \frac{E}{2}$.

Le travail électrique fourni par le générateur vaut :

$$W_{g,1} = \int_0^{+\infty} \frac{E}{2} i \mathrm{d}t = \frac{1}{2}CE \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}CE\,(u(+\infty) - u(0)) = \frac{1}{4}CE^2$$



Deuxième étape : Par continuité la tension au début de la deuxième étape vaut : $u(0^+) = \frac{E}{2}$. La tension en régime permanent vaut $u(+\infty) = E$ (même raisonnement que pour la première étape).

Le travail électrique fourni par le générateur vaut :

$$W_{g,2} = \int_0^{+\infty} E i \mathrm{d}t = CE \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = CE\,(u(+\infty) - u(0)) = \frac{1}{2}CE^2$$

Le travail total fourni par les deux générateurs vaut : $W_g = W_{g,1} + W_{g,2} = \frac{3}{4}CE^2$.

Le travail reçu par le condensateur au cours des deux étapes vaut :

$$W_c = \mathscr{E}_{e,\text{final}} - \mathscr{E}_{e,\text{initial}} = \frac{1}{2}CE^2$$

Au cours de cette charge on récupère l'énergie utile W_c et on dépense l'énergie W_g. Le rendement énergétique vaut : $\boxed{\eta = \frac{W_c}{W_g} = \frac{2}{3}}$.

On obtient un rendement de **67%** en effectuant la charge en deux étapes. On a vu dans l'exemple 6.1 que le rendement est de 50% si on l'effectue en une seule étape. D'un point de vue énergétique **il est avantageux de fractionner la charge**.

Remarque : Fractionner la charge implique **qu'elle est plus lente**. Il y a un compromis à trouver entre une charge rapide avec un mauvais rendement ou bien une charge lente avec un bon rendement.

2. On généralise le raisonnement de la question précédente. Le travail reçu par le condensateur reste le même quelque soit le nombre d'étapes : $W_c = \frac{1}{2}CE^2$ puisque la tension initiale est nulle et la tension finale est égale à E.

On considère une étape quelconque de la charge, au cours de laquelle la force électromotrice vaut $\frac{kE}{N}$ avec $k \in [\![1, N]\!]$. La tension du condensateur varie de $u(0^+) = \frac{(k-1)E}{N}$ à $u(+\infty) = \frac{kE}{N}$.

Le travail électrique fourni par le générateur vaut :

$$W_{g,k} = \int_0^{+\infty} \frac{kE}{N} i \mathrm{d}t = \frac{k}{N}CE \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{k}{N}CE\,(u(+\infty) - u(0)) = \frac{k}{N}CE\left(\frac{kE}{N} - \frac{(k-1)E}{N}\right)$$

On obtient $W_{g,k} = \frac{1}{N^2}kCE^2$. On somme les travaux fournis au cours de l'ensemble des étapes :

$$W_g = \sum_{k=1}^{N} W_{g,k} = \frac{1}{N^2}CE^2 \sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{N^2}CE^2 \times \frac{N(N+1)}{2} = \frac{1}{2}\frac{N+1}{N}CE^2$$

Le rendement énergétique global de la charge vaut : $\boxed{\eta = \frac{W_c}{W_g} = \frac{N}{N+1} = 91\%}$ (pour $N = 10$).

Le rendement tend vers **100%** dans la limite $N \to +\infty$. On voit que dans la limite d'un processus infiniment lent, on peut charger le condensateur sans dissiper d'énergie dans le résistor.