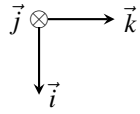
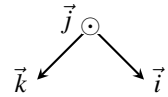
Corrigés

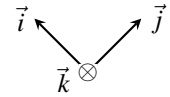
Application 1

1. a) directe. b) indirecte. c) directe.

2.

a) 

b) 

c) 

Application 2

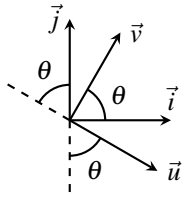


Figure 1

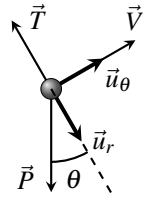


Figure 2

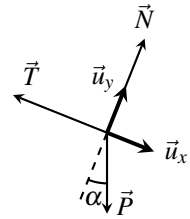


Figure 3-1

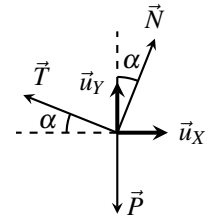


Figure 3-2

1. $\boxed{\vec{u} = \sin\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j}}$ et $\boxed{\vec{v} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}}$.

$\boxed{\vec{i} = \sin\theta\,\vec{u} + \cos\theta\,\vec{v}}$ et $\boxed{\vec{j} = -\cos\theta\,\vec{u} + \sin\theta\,\vec{v}}$.

2. $\boxed{\vec{P} = \|\vec{P}\|(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta)}$, $\boxed{\vec{T} = -\|\vec{T}\|\vec{u}_r}$, $\boxed{\vec{V} = \|\vec{V}\|\vec{u}_\theta}$.

3. $\boxed{\vec{N} = \|\vec{N}\|\vec{u}_y}$; $\boxed{\vec{T} = -\|\vec{T}\|\vec{u}_x}$; $\boxed{\vec{P} = \|\vec{P}\|(\sin\alpha\,\vec{u}_x - \cos\alpha\,\vec{u}_y)}$.

$\boxed{\vec{N} = \|\vec{N}\|(\sin\alpha\,\vec{u}_X + \cos\alpha\,\vec{u}_Y)}$; $\boxed{\vec{T} = \|\vec{T}\|(-\cos\alpha\,\vec{u}_X + \sin\alpha\,\vec{u}_Y)}$; $\boxed{\vec{P} = -\|\vec{P}\|\vec{u}_Y}$.

Application 3

1. Position : $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y \implies \boxed{\vec{r} = v_1 t\,\vec{u}_x + v_2 t\,\vec{u}_y}$.

Vitesse : $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y \implies \boxed{\vec{v} = v_1\,\vec{u}_x + v_2\,\vec{u}_y}$.

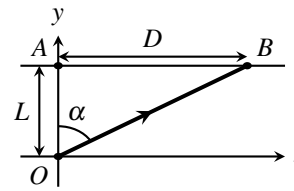
Accélération : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y \implies \boxed{\vec{a} = \vec{0}}$.

2. La vitesse perpendiculaire à la rivière (selon (Oy)) vaut $\boxed{\vec{v}\cdot\vec{u}_y = v_2 = 0{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

La vitesse dans l'axe de la rivière (selon (Ox)) vaut $\boxed{\vec{v}\cdot\vec{u}_x = v_1 = 1{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

La vitesse en norme vaut : $\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

3. On élimine le temps : $t = \frac{x}{v_1} \iff \boxed{y(x) = \frac{v_2}{v_1}x}$.



La trajectoire est **rectiligne**.

4. La traversée s'arrête lorsque :

$$y = v_2 t_{\text{tr}} = L \iff \boxed{t_{\text{tr}} = \frac{L}{v_2} = 60\,\text{s}}$$

La distance AB parcourue dans l'axe de la rivière vaut $D = v_1 t_{\text{tr}} = 108\,\text{m}$.

D'après le théorème de Pythagore : $\boxed{OB^2 = \sqrt{L^2 + D^2} = 121\,\text{m}}$.

5. L'angle α vérifie : $\tan\alpha = \frac{D}{L} \iff \boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{D}{L}\right) = 63^\circ}$.

Application 4

1. Position : $\vec{r} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$.

Vitesse : $\vec{r} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z \iff \boxed{\vec{v} = 2a_0 t\vec{u}_r + (a_0 t^2 + r_0)\omega_0\vec{u}_\theta - v_0\vec{u}_z}$.

Accélération :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z \iff \boxed{\vec{a} = (2a_0 - (a_0 t^2 + r_0)\omega_0^2)\vec{u}_r + 4a_0\omega_0 t\vec{u}_\theta}$$

2. La vitesse angulaire vaut $\dot{\theta}(t) = \omega_0$, elle est bien constante. On la convertit en tours$\cdot\,\text{min}^{-1}$:

$$\dot{\theta} = 3{,}0\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \iff \boxed{\dot{\theta} = 3{,}0 \times \frac{60}{2\pi} = 29\,\text{tours}\cdot\text{min}^{-1}}$$

3. À t quelconque : $\|\vec{v}\| = \sqrt{4a_0^2 t^2 + (a_0 t^2 + r_0)^2\omega_0^2 + v_0^2}$.

On fait l'application numérique pour $t = 1\,\text{s}$: $\boxed{\|\vec{v}(t = 1\,\text{s})\| = 6{,}6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

4. À t quelconque : $\|\vec{a}\| = \sqrt{(2a_0 - (a_0 t^2 + r_0)\omega_0^2)^2 + 16a_0^2\omega_0^2 t^2}$.

On fait l'application numérique pour $t = 0$: $\boxed{\|\vec{a}(t = 0)\| = 7{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$.

Application 5

1. L'accélération normale du véhicule vaut : $a_n = \frac{v^2}{R} = 0{,}99\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. On est à la limite du domaine de stabilité mais l'adhérence peut encore est maintenue.

2. L'adhérence est maintenue tant que :

$$a_n = \frac{v^2}{R} \leq a_{n,\text{lim}} = 1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \iff \boxed{R \geq R_{\text{min}} = \frac{v^2}{a_{n,\text{lim}}} = 1{,}3\,\text{km}}$$

Application 6

1. On repère le mouvement des véhicules avec un axe (Ox) dont l'origine est choisie au point de départ de la course. Par la suite on notera respectivement $x_v(t)$ et $x_f(t)$ la position de la voiture et celle de la formule 1. On définit l'origine des temps à l'instant où la course commence.

Cinématique (pour la formule 1) :
Position : $\vec{r}_f = x_f \vec{u}_x$.
Vitesse : $\vec{v}_f = \dot{x}_f \vec{u}_x$.
Accélération : $\vec{a}_f = \ddot{x}_f \vec{u}_x$.
L'accélération a_f de la formule 1 est constante. On intègre pour obtenir la vitesse et la position à tout instant.
$\ddot{x}_f = a_f$,
$\dot{x}_f = a_f t + C_1$,
$x_f = \frac{1}{2} a_f t^2 + C_1 t + C_2$.
Conditions initiales : à $t = 0$ la formule 1 est à l'origine O sans vitesse.
Ainsi : $x_f(0) = 0 = C_2$ et $\dot{x}_f(0) = 0 = C_1$. On en déduit que : $\begin{cases} \dot{x}_f = a_f t \\ x_f = \frac{1}{2} a_f t^2 \end{cases}$.
On sait que la vitesse de la formule 1 vaut $v_1 = 100\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ à la date $t_1 = 2{,}5\,\mathrm{s}$, d'où :

$$v_1 = a_f t_1 \iff \boxed{a_f = \frac{v_1}{t_1} = 11{,}1\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}}$$

2. La voiture roule à vitesse constante $v_v = 41{,}7\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Sa course dure $t_v = \frac{L}{v_v} = 12\,\mathrm{s}$.
La formule 1 termine sa course lorsque $x_f = \frac{1}{2} a_f t_f^2 = L \iff \boxed{t_f = \sqrt{\frac{2L}{a_f}} = 9{,}5\,\mathrm{s}}$.
On a $t_f < t_v$ donc **la formule 1 remporte la course**.

3. La vitesse de la formule 1 à la fin de la course vaut $\boxed{\dot{x}_f(t_f) = \sqrt{2La_f} = 380\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}}$.

4. La vitesse de la voiture v_v est constante. On intègre pour obtenir sa position à tout instant :
$\dot{x}_v = v_v$,
$x_v = v_v t + C_3$.
Condition initiale : $x_v(0) = 0 = C_3$ donc $x_v = v_v t$.
La formule 1 rattrape la voiture à la date t_r telle que :

$$x_f(t_r) = x_v(t_r) \iff \frac{1}{2} a_f t_r^2 = v_v t_r \iff t_r = \frac{2v_v}{a_f} = 7{,}5\,\mathrm{s}$$

Les deux véhicules ont alors parcouru la même distance : $\boxed{x_v(t_r) = x_f(t_r) = \frac{2v_v^2}{a_f} = 312\,\mathrm{m}}$.

Application 7

1. On raisonne par analyse dimensionnelle :

$$\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\beta v^2\right] \iff \frac{[v]}{\mathrm{T}} = [\beta]\,[v]^2 \iff [\beta] = \frac{1}{[v]\mathrm{T}} = \mathrm{L}^{-1}$$

Le paramètre β s'exprime en $\boxed{\mathrm{m}^{-1}}$.

2. On sépare les variables : $\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -\beta\,\mathrm{d}t$.

On intègre entre l'instant initial $(t=0, v=v_0)$ et une date quelconque :

$$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -\int_0^t \beta \mathrm{d}t \iff -\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = -\beta t \iff \boxed{v(t) = \frac{v_0}{1+\beta v_0 t}}$$

3. D'après l'énoncé on peut écrire $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. Ainsi :

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\beta v^2 \iff \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\beta \mathrm{d}x$$

On intègre entre la position initiale $(x=0, v=v_0)$ et une position quelconque :

$$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\int_0^x \beta \mathrm{d}x \iff \ln\frac{v}{v_0} = -\beta x \iff \boxed{v(x) = v_0 \mathrm{e}^{-\beta x}}$$

4. On détermine la position pour laquelle la vitesse est divisée par deux :

$$v(\ell) = v_0 \mathrm{e}^{-\beta \ell} = \frac{v_0}{2} \iff \boxed{\ell = \frac{\ln 2}{\beta} = 165\,\mathrm{m}}$$

Exercice 1 : Mouvement plan

1. Position : $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y \iff \boxed{\vec{r} = R\cos(\omega t)\vec{u}_x + R\sin(\omega t)\vec{u}_y}$.

Vitesse : $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y \iff \boxed{\vec{v} = -R\omega\sin(\omega t)\vec{u}_x + R\omega\cos(\omega t)\vec{u}_y}$.

Accélération : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y \iff \boxed{\vec{v} = -R\omega^2\cos(\omega t)\vec{u}_x - R\omega^2\sin(\omega t)\vec{u}_y}$.

On remarque que $\boxed{\vec{a} = -\omega^2\vec{r}}$.

2. On élimine le temps en utilisant la relation trigonométrique : $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$.

$$\begin{cases} \cos(\omega t) = \frac{x}{R} \\ \sin(\omega t) = \frac{y}{R} \end{cases} \implies \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1 \iff \boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

La trajectoire est **un cercle de rayon R centré sur l'origine du repère**.

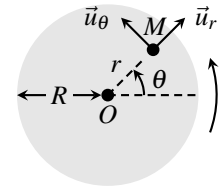
3. Dans la base cartésienne : $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-R\omega\sin(\omega t))^2 + (R\omega\cos(\omega t))^2} = R\omega$.
On se place maintenant dans la base polaire. Pour ce mouvement circulaire de rayon R les vecteurs cinématiques s'écrivent : $\vec{r} = R\vec{u}_r$ et $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ d'où $\|\vec{v}\| = R\dot{\theta}$.

En identifiant les deux expressions de la vitesse en norme on conclut que $\boxed{\dot{\theta} = \omega = \mathrm{Cste}}$.

Exercice 2 : Une mouche sur un tourne-disque

1. La vitesse angulaire de rotation du tourne-disque $\omega = 3{,}5\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 33\,\mathrm{tours}\cdot\mathrm{min}^{-1}$. **Le tourne-disque est réglé pour lire des 33 tours**.

2. On se place dans la base polaire. La mouche s'éloigne du centre du plateau à la vitesse constante v donc $\dot{r} = v$. On intègre, sachant que $r(0) = 0$: $r(t) = vt$.
La mouche est entraînée par la rotation du plateau à vitesse angulaire constante donc $\dot{\theta} = \omega$. On intègre, sachant que $\theta(0) = 0$: $\theta(t) = \omega t$.



Les équations horaires de la trajectoires sont $\boxed{(r(t) = vt \ ; \ \theta(t) = \omega t)}$.

3. La mouche atteint le bord à la date t_1 telle que : $r(t_1) = R = vt_1 \iff \boxed{t_1 = \frac{R}{v} = 15\,\text{s}}$.

Pendant ce déplacement sa direction a varié de $\Delta\theta = \omega t_1 = 52,5\,\text{rad}$.

Cela correspond à un nombre de tours : $\boxed{N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = 8,4}$.

4. On exprime les vecteurs cinématiques :
Position : $\vec{r} = r\vec{u}_r = vt\,\vec{u}_r$.
Vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = v\,\vec{u}_r + r\omega\,\vec{u}_\theta$.
Accélération : $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta = -r\omega^2\vec{u}_r + 2v\omega\,\vec{u}_\theta$.
On calcule la vitesse et l'accélération en norme lorsque $r = R$:

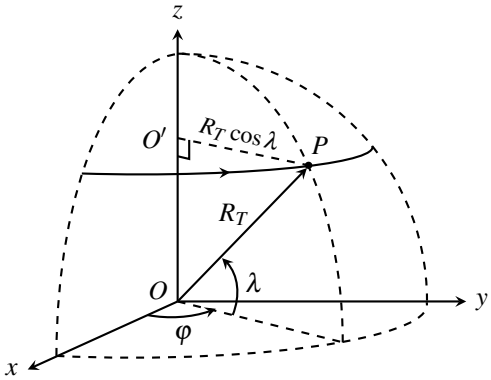
$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{v^2 + R^2\omega^2} = 1,1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\|\vec{a}\| = \sqrt{R^2\omega^4 + 4v^2\omega^2} = 3,7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

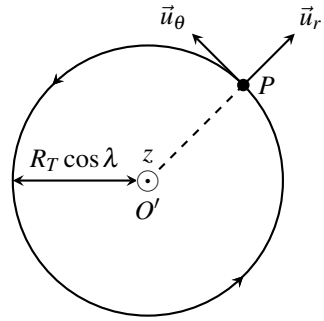
Exercice 3 : Rotation de la Terre

1. Pendant une durée T la Terre tourne d'un angle $\Omega T = 2\pi$ (un tour complet).

La vitesse angulaire de la Terre vaut $\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{T} = 7,3\cdot10^{-5}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$.

2. Un point fixe de la surface de la Terre possède dans le référentiel géocentrique un mouvement **circulaire uniforme** de centre O', de rayon $R_T\cos\lambda$ et de vitesse angulaire Ω (voir ci-dessous à gauche). On définit le repère polaire $(O', \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ dans le plan du mouvement (ci-dessous à droite).

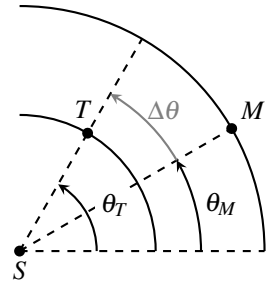




On écrit les vecteurs cinématiques :
Position : $\vec{r} = \overrightarrow{O'P} = R_T\cos\lambda\,\vec{u}_r$.
Vitesse : $\vec{v} = R_T\cos\lambda \times \Omega\vec{u}_\theta \implies \boxed{\|\vec{v}\| = R_T\Omega\cos\lambda}$.
Accélération : $\vec{a} = R_T\cos\lambda \times (-\Omega^2\vec{u}_r) \implies \boxed{\|\vec{a}\| = R_T\Omega^2\cos\lambda}$.

À Amiens on trouve numériquement $\boxed{\|\vec{v}\| = 300\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$ et $\boxed{\|\vec{a}\| = 0,022\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$.

Exercice 4 : Période synodique de Mars



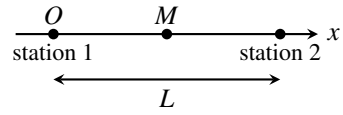
On représente schématiquement les orbites de la Terre et de Mars. On définit l'origine des temps et des angles lorsque La Terre et Mars sont en opposition. On s'intéresse à l'écart angulaire entre les deux planètes $\Delta\theta = \theta_T(t) - \theta_M(t)$. Pour $t > 0$ la Terre et Mars reviennent pour la première fois en opposition lorsque $\Delta\theta = 2\pi$.

La Terre et Mars avancent à vitesse angulaire constante sur leur orbite : $\dot{\theta}_T = \frac{2\pi}{T_T}$ et $\dot{\theta}_M = \frac{2\pi}{T_M}$. Par intégration et sachant que $\theta_T(0) = \theta_M(0) = 0$ on trouve : $\theta_T(t) = \frac{2\pi}{T_T}t$; $\theta_M(t) = \frac{2\pi}{T_M}t$.

On en déduit l'expression de la période synodique T_{syn} :

$$\Delta\theta(T_{\text{syn}}) = 2\pi \iff \left(\frac{2\pi}{T_T} - \frac{2\pi}{T_M}\right) T_{\text{syn}} = 2\pi \iff \boxed{T_{\text{syn}} = \frac{T_M T_T}{T_M - T_T} = 779\,\text{jours}}$$

Exercice 5 : Dans le métro



1. La vitesse du métro pendant sa phase de mouvement uniforme correspond à celle qu'il acquiert à la fin de la phase d'accélération. On étudie donc cette première phase.

On repère la position du métro avec un axe (Ox) dont l'origine se trouve à la station de départ. Le mouvement commence à $t = 0$. On intègre pour trouver la vitesse et la position.

Phase d'accélération :

$\ddot{x} = a_a = \text{Cste}$,

$\dot{x} = a_a t + C_1$,

$x = \frac{1}{2}a_a t^2 + C_1 t + C_2$.

Conditions initiales : $\dot{x}(0) = 0 = C_1$ et $x(0) = 0 = C_2$ donc : $\begin{cases} \dot{x} = a_a t \\ x = \frac{1}{2}a_a t^2 \end{cases}$.

La vitesse de mouvement uniforme est atteinte à la date t_a : $\boxed{v_u = a_a t_a = 20\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

2. Phase de décélération : La vitesse diminue donc $\ddot{x}$ est négative.

$\ddot{x} = -a_d = \text{Cste}$,

$\dot{x} = -a_d t + C_3$,

$x = -\frac{1}{2}a_d t^2 + C_3 t + C_4$.

Conditions initiales : Pour simplifier on redéfinit $x = 0$ et $t = 0$ au début de la phase de décélération. À cet instant la vitesse est égale à v_u : $\dot{x}(0) = v_u = C_3$ et $x(0) = 0 = C_4$.

On conclut que : $\begin{cases} \dot{x} = -a_d t + v_u \\ x = -\frac{1}{2}a_d t^2 + v_u t \end{cases}$.

On cherche la date t_d à laquelle le métro s'arrête : $\dot{x}(t_d) = 0 = -a_d t_d + v_u \iff \boxed{t_d = \frac{v_u}{a_d} = 25\,\text{s}}$.

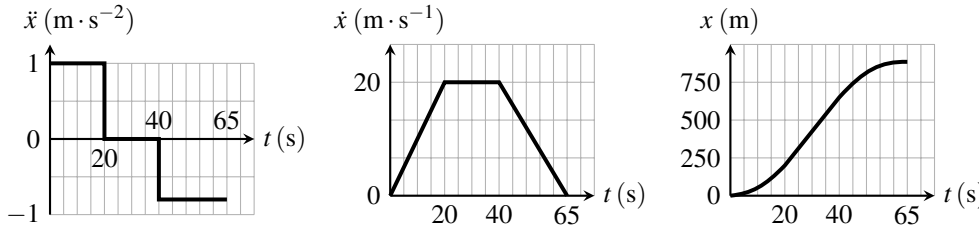
3. On calcule la distance parcourue pendant la phase d'accélération : $L_a = \frac{1}{2}a_a t_a^2 = 200\,\text{m}$.

Même chose pour la phase de décélération : $L_d = -\frac{1}{2}a_d t_d^2 + v_u t_d = \frac{v_u^2}{2a_d} = 250\,\text{m}$.

La phase de mouvement uniforme s'étend sur une distance : $L_u = L - L_a - L_d = 400\,\text{m}$.

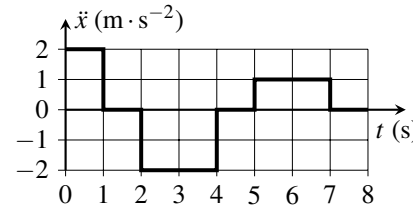
Sa durée vaut : $\boxed{t_u = \frac{L_u}{v_u} = 20\,\text{s}}$.

4. On trace ci-dessous les trois graphes.



Exercice 6 : Avec un graphe

1. L'accélération $\ddot{x}$, qui est égale à la dérivée temporelle de $\dot{x}$, s'obtient en mesurant le coefficient directeur des différentes portions rectilignes.



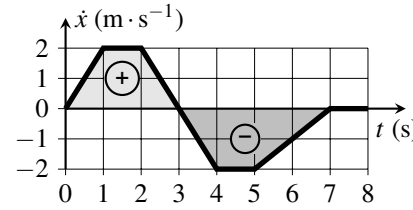
• Pour $0 \leq t \leq 1\,\text{s}$ et $5\,\text{s} \leq t \leq 7\,\text{s}$: mouvement uniformément accéléré ($\ddot{x}$ constante et positive),

• Pour $1\,\text{s} \leq t \leq 2\,\text{s}$ et $4\,\text{s} \leq t \leq 5\,\text{s}$: mouvement uniforme ($\ddot{x} = 0$),

• Pour $2\,\text{s} \leq t \leq 4\,\text{s}$: mouvement uniformément décéléré ($\ddot{x}$ constante et négative).

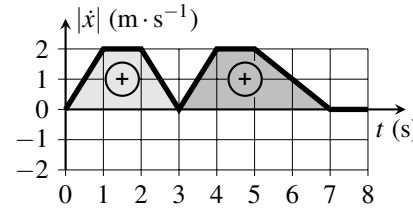
2. Le déplacement de la particule entre $t = 0$ et t quelconque vaut : $x(t) - x(0) = \int_0^t \dot{x}(t)\mathrm{d}t$.

Sachant que $x(0) = 0$, on détermine la position en calculant l'intégrale de la vitesse. Dans le cas présent cette intégrale peut s'obtenir de manière graphique en mesurant **l'aire sous la courbe** de $t \mapsto \dot{x}(t)$. Chaque rectangle de la grille a une "aire" égale à $1\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \times 1\,\text{s} = 1\,\text{m}$.



On compte que l'aire "gris clair" correspond à la surface de quatre rectangles et l'aire "gris foncé" à celle de cinq rectangles. L'aire totale est donc négative et correspond à l'aire d'un seul rectangle. On conclut que $\boxed{x(7) = -1\,\text{m}}$.

3. Pour ce mouvement rectiligne on a $\|\vec{v}\| = |\dot{x}|$. Le calcul est semblable à celui de la question précédente à la différence qu'on remplace $\dot{x}$ par sa valeur absolue. D'après ce que l'on a vu à la question précédente l'aire totale est égale à $4 + 5 = 9$ rectangles donc la distance totale parcourue par la particule vaut $\boxed{D = 9\,\text{m}}$.



Exercice 7 : Spirale exponentielle

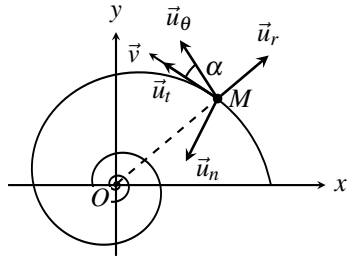
1. On exprime les vecteurs cinématiques du point M en coordonnées polaires.

Position : $\vec{r} = r\vec{u}_r = a\mathrm{e}^{-t/\tau}\vec{u}_r$.

Vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \implies \boxed{\vec{v} = a\mathrm{e}^{-t\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\vec{u}_r + \omega\vec{u}_\theta\right)}$.

Accélération : $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta \implies \boxed{\vec{a} = \mathrm{e}^{-t/\tau}\left(\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)\vec{u}_r - \frac{2\omega}{\tau}\vec{u}_\theta\right)}$.

2. Voir figure ci-contre.



3. On projette, en fonction de α, le vecteur vitesse dans la base polaire : $\vec{v} = \|\vec{v}\|(-\sin\alpha\vec{u}_r + \cos\alpha\vec{u}_\theta)$. On identifie avec l'expression du vecteur vitesse écrit à la question 1 :

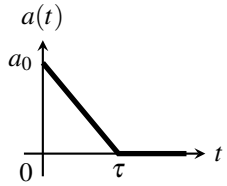
$$\begin{cases} -\frac{a}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} = -\|\vec{v}\|\sin\alpha \\ a\omega\mathrm{e}^{-t/\tau} = \|\vec{v}\|\cos\alpha \end{cases}$$

Par ailleurs on a $\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(-\frac{a}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)^2 + \left(a\omega\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)^2} = a\mathrm{e}^{-t/\tau}\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2}$. Après simplifications on trouve :

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\cos\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}}$$

$\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ sont indépendant du temps donc α est indépendant du temps.

Exercice 9 : Record du monde du 100 m



On se place dans un repère cartésien (Ox) tel que $x = 0$ à $t = 0$ au début de la course et $x = L = 100\,\mathrm{m}$ à l'arrivée, à la date $T = 9,58\,\mathrm{s}$. Notons a_0 l'accélération initiale d'Usain Bolt. L'allure du graphe nous permet d'exprimer l'accélération à tout instant, sous la forme :

$$\ddot{x}(t) = \begin{cases} a_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$$

On intègre pour déterminer la vitesse. On note $v_{\max}$ la vitesse de pointe. À l'instant initial la vitesse est nulle : $\dot{x}(0) = 0$. On en déduit que :

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} a_0\left(t - \frac{t^2}{2\tau}\right) & 0 \leq t \leq \tau \\ v_{\max} & t > \tau \end{cases}$$

La vitesse est continue en $t = \tau$ donc on peut écrire : $v_{\max} = \frac{a_0\tau}{2}$ (1).
On intègre à nouveau pour obtenir la position. Sachant que $x(0) = 0$ et $x(T) = L$, on trouve :

$$x(t) = \begin{cases} a_0\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\tau}\right) & 0 \leq t \leq \tau \\ v_{\max}(t - T) + L & t > \tau \end{cases}$$

Puisque la position est continue en $t = \tau$, on peut écrire : $v_{\max}(\tau - T) + L = \frac{a_0\tau^2}{3}$ (2).

À partir de (1) et (2) on montre que : $\boxed{v_{\max} = \frac{3L}{3T - \tau} = 12,4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 44,6\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}}$.

Exercice 10 : Influence des conditions initiales sur un mouvement

1. On transforme l'équation différentielle pour séparer les variables :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \implies v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{b}{x^2} \iff v\mathrm{d}v = -\frac{b}{x^2}\mathrm{d}x$$

On intègre entre le point de départ (v_0, x_0) et un point quelconque (v, x) :

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = -b\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \iff \frac{v^2-v_0^2}{2} = b\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right) \iff \boxed{v^2(x) = v_0^2 + 2b\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)}$$

2. Le terme $v^2(x)$ est nécessairement positif. Cela impose une contrainte sur la valeur de x :

$$v_0^2 + 2b\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right) \geq 0 \iff \boxed{x \leq x_{\max} = \frac{x_0}{1-\frac{x_0 v_0^2}{2b}}}$$

3. On trace l'allure du graphe de $v^2(x)$. On constate que P ne s'arrête jamais car $v > 0\ \forall t$.

Le graphe a une asymptote horizontale ce qui signifie qu'au bout d'un temps suffisamment long P avance quasiment à la vitesse constante $v_\infty = \sqrt{v_0^2 - 2b/x_0}$.

Cette vitesse est bien définie puisque $v_0^2 \geq 2b/x_0$.

