Correction du DNS 6

EXERCICE 1

1) La fonction f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ (somme de fonctions dérivables). Pour tout $x>0$:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}.$$

2) La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$g'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x=x(x+2)e^x.$$

3) À l'aide d'un tableau de signes on voit que $\dfrac{1+2x}{2-x}>0$ si et seulement si $-1/2<x<2$. La fonction ln est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ donc h est définie et dérivable sur $]-1/2,2[$ par composition. Pour tout $x\in]-1/2,2[$:

$$h(x)=\ln(1+2x)-\ln(2-x)$$

donc

$$h'(x)=\frac{2}{1+2x}-\frac{-1}{2-x}=\frac{2(2-x)+(1+2x)}{(1+2x)(2-x)}=\frac{5}{(1+2x)(2-x)}.$$

4) En écrivant

$$x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\frac{\ln x}{x}}$$

on voit que la fonction i est définie et dérivable sur $D=]0,+\infty[$ d'après les théorèmes sur les opérations. Pour tout $x\in D$:

$$i'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}e^{\frac{\ln x}{x}}=\frac{1-\ln x}{x^2}e^{\frac{\ln x}{x}}.$$

5) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle est strictement positive sur les intervalles de la forme $]2k\pi,(2k+1)\pi[$ où $k\in\mathbb{Z}$. La fonction racine carrée est dérivable sur $]0,+\infty[$. Par composition la fonction j est donc dérivable sur

$$D=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi,(2k+1)\pi[.$$

Pour tout $x\in D$:

$$j'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

6) Les fonctions ch et $x\mapsto x^3$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc k aussi par composition. Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$k'(x)=3\,\mathrm{ch}^2(x)\,\mathrm{sh}(x).$$

7) Les fonctions $x\mapsto x^3$ et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc ℓ aussi par composition. Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\ell'(x)=3x^2\,\mathrm{sh}(x^3).$$

8) La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc m aussi par composition. Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$m'(x)=\mathrm{sh}(\mathrm{ch}(\mathrm{ch}(x)))\,\mathrm{sh}(\mathrm{ch}(x))\,\mathrm{sh}(x).$$

EXERCICE 2

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes sur les opérations sur les fonctions dérivables, et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=1-4\frac{e^x(e^x+1)-e^xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x+1)^2-4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}.$$

On a donc $f'(0)=0$ et $f'(x)>0$ si $x\neq 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Limites : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{4}{1+e^{-x}}\right)=+\infty$.

2) a) On a

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x+4)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{1+e^{-x}}+4\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{-x}}{1+e^{-x}}=0$$

donc la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 4$.

b) On a

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4e^x}{e^x+1}\right) = 0$$

donc la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a vu que

$$f(x) - (x-4) = \frac{4e^{-x}}{1+e^{-x}} > 0$$

donc la courbe est toujours au-dessus de l'asymptote d'équation $y = x - 4$, et

$$f(x) - x = -\frac{4e^x}{e^x+1} < 0$$

donc la courbe est toujours en-dessous de l'asymptote d'équation $y = x$.

3) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

EXERCICE 3

1) a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x},$$

donc f est strictement croissante sur $]0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. Son maximum est $f(1) = 0$.

b) On en déduit que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) \leqslant 0$, d'où $\ln x \leqslant x - 1$.

2) a) Pour $i \in \{1,\dots,n\}$, l'inégalité précédente appliquée à $\dfrac{na_i}{a_1+\ldots+a_n}$ donne $\ln \dfrac{na_i}{a_1+\ldots+a_n} \leqslant \dfrac{na_i}{a_1+\ldots+a_n} - 1$.

En additionnant ces inégalités pour i allant de 1 à n on obtient

$$\ln\frac{na_1}{a_1+\ldots+a_n} + \ldots + \ln\frac{na_n}{a_1+\ldots+a_n} \leqslant \frac{na_1}{a_1+\ldots+a_n} + \ldots + \frac{na_n}{a_1+\ldots+a_n} - n,$$

soit

$$\ln\left(\frac{na_1}{a_1+\ldots+a_n} \times \ldots \times \frac{na_n}{a_1+\ldots+a_n}\right) \leqslant \frac{na_n+\ldots+na_n}{a_1+\ldots+a_n} - n,$$

ce qui donne

$$\ln\frac{n^n a_1\ldots a_n}{(a_1+\ldots+a_n)^n} \leqslant 0.$$

Alors

$$\frac{n^n a_1\ldots a_n}{(a_1+\ldots+a_n)^n} \leqslant 1$$

car ln est croissante sur $]0,+\infty[$, donc

$$n^n a_1\ldots a_n \leqslant (a_1+\ldots+a_n)^n.$$

La fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est croissante, donc on a

$$n(a_1\ldots a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant a_1+\ldots+a_n,$$

d'où on déduit finalement que

$$\sqrt[n]{a_1\ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}.$$

Cas d'égalité : on a $\sqrt[n]{a_1\ldots a_n} = \dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ si et seulement si toutes les inégalités que l'on a additionnées sont des égalités. Or l'étude de f montre que $\ln x = x - 1$ si et seulement si $x = 1$. Ainsi l'égalité est obtenue si et seulement si on a $\dfrac{na_i}{a_1+\ldots+a_n} = 1$, soit $a_i = \dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}$, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, c'est-à-dire si et seulement si tous les a_i sont égaux.

b) En appliquant l'inégalité précédente à $\dfrac{1}{a_1}, \ldots, \dfrac{1}{a_n}$, qui sont des réels strictement positifs, on a

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdots\frac{1}{a_n}} \leqslant \frac{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n},$$

soit

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}} \leqslant \frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n},$$

et donc, en prenant les inverses :

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$