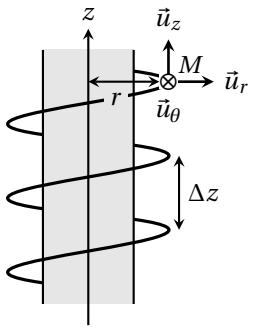
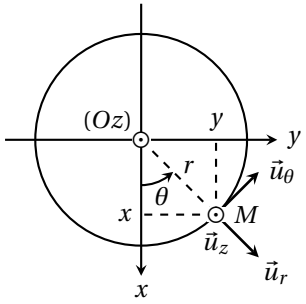
Corrigé DM8

Exercice : Escalier en colimaçon



vue de profil



vue de dessus

1. Le rayon de l'escalier vaut : $\boxed{r = \sqrt{x^2+y^2} = b = 1\,\text{m}}$.

Le *pas* de l'escalier vaut : $\boxed{\Delta z = z(\theta+2\pi) - z(\theta) = 2\pi h = 2{,}5\,\text{m}}$.

2. On exprime les vecteurs cinématiques dans la base cylindrique :

Position : $\vec{r} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z = b\vec{u}_r + h\theta\vec{u}_z$.

Vitesse : $\vec{v} = b\dot{\theta}\vec{u}_\theta + h\dot{\theta}\vec{u}_z$.

En norme : $\|\vec{v}\| = \sqrt{(b\dot{\theta})^2 + (h\dot{\theta})^2} = \dot{\theta}\sqrt{b^2+h^2} \iff \boxed{\dot{\theta} = \frac{v}{\sqrt{b^2+h^2}}}$.

3. On exprime la vitesse verticale : $\dot{z} = h\dot{\theta} = \frac{hv}{\sqrt{b^2+h^2}}$. Elle est constante.

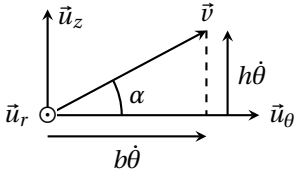
On intègre par rapport au temps : $z = \frac{hvt}{\sqrt{b^2+h^2}} + C_1$.

La personne monte l'escalier en une durée T, on peut donc écrire :

$$H = z(T) - z(0) = \frac{hvT}{\sqrt{b^2+h^2}} \iff \boxed{v = \frac{H}{T}\sqrt{1+\frac{b^2}{h^2}} = 0{,}37\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

4. On a vu que $\vec{v} = b\dot{\theta}\vec{u}_\theta + h\dot{\theta}\vec{u}_z$. On représente schématiquement le vecteur vitesse et ses coordonnées dans la base $(\vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ ainsi que l'angle α. On voit que :

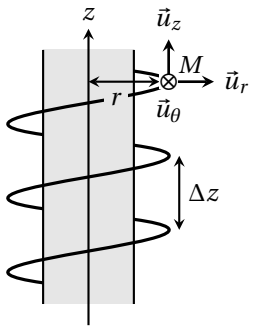
$$\tan\alpha = \frac{h\dot{\theta}}{b\dot{\theta}} \iff \boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{h}{b}\right) = 22°}$$



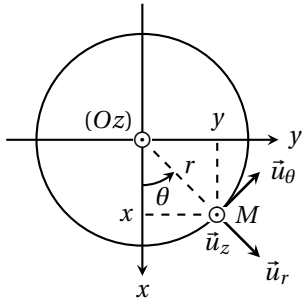
5. Le mouvement est uniforme de vitesse v donc : $\boxed{L = vT = H\sqrt{1+\frac{b^2}{h^2}} = 40\,\text{m}}$.

Corrigé DM8

Exercice : Escalier en colimaçon



vue de profil



vue de dessus

1. Le rayon de l'escalier vaut : $\boxed{r = \sqrt{x^2+y^2} = b = 1\,\text{m}}$.

Le *pas* de l'escalier vaut : $\boxed{\Delta z = z(\theta+2\pi) - z(\theta) = 2\pi h = 2{,}5\,\text{m}}$.

2. On exprime les vecteurs cinématiques dans la base cylindrique :

Position : $\vec{r} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z = b\vec{u}_r + h\theta\vec{u}_z$.

Vitesse : $\vec{v} = b\dot{\theta}\vec{u}_\theta + h\dot{\theta}\vec{u}_z$.

En norme : $\|\vec{v}\| = \sqrt{(b\dot{\theta})^2 + (h\dot{\theta})^2} = \dot{\theta}\sqrt{b^2+h^2} \iff \boxed{\dot{\theta} = \frac{v}{\sqrt{b^2+h^2}}}$.

3. On exprime la vitesse verticale : $\dot{z} = h\dot{\theta} = \frac{hv}{\sqrt{b^2+h^2}}$. Elle est constante.

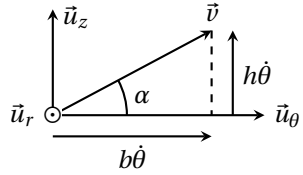
On intègre par rapport au temps : $z = \frac{hvt}{\sqrt{b^2+h^2}} + C_1$.

La personne monte l'escalier en une durée T, on peut donc écrire :

$$H = z(T) - z(0) = \frac{hvT}{\sqrt{b^2+h^2}} \iff \boxed{v = \frac{H}{T}\sqrt{1+\frac{b^2}{h^2}} = 0{,}37\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

4. On a vu que $\vec{v} = b\dot{\theta}\vec{u}_\theta + h\dot{\theta}\vec{u}_z$. On représente schématiquement le vecteur vitesse et ses coordonnées dans la base $(\vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ ainsi que l'angle α. On voit que :

$$\tan\alpha = \frac{h\dot{\theta}}{b\dot{\theta}} \iff \boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{h}{b}\right) = 22°}$$



5. Le mouvement est uniforme de vitesse v donc : $\boxed{L = vT = H\sqrt{1+\frac{b^2}{h^2}} = 40\,\text{m}}$.