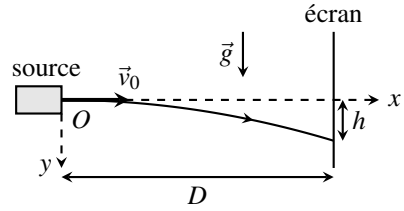
Corrigés

Application 1

1. Système : particule.
Référentiel : terrestre supposé galiléen.
Repère : cartésien (Oxy).
Bilan des forces : poids $\vec{P}$.
PFD : $m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g} \iff \vec{a} = \vec{g}$.



On projette dans la base cartésienne : $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = g \end{cases}$.

On intègre avec les conditions initiales : $\dot{x}(0) = v_0$, $\dot{y}(0) = 0$, $x(0) = y(0) = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ x = v_0 t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{y} = gt \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad y(x) = \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

La particule atteint l'écran lorsque $x = D$; la déviation verticale vaut $\boxed{h = y(D) = \frac{gD^2}{2v_0^2}}$.

2. La déviation verticale est minimale quand la vitesse initiale et maximale, et vice-versa. Numériquement on trouve comme valeurs extrêmes $h_{\min} = 0,070\,\text{mm}$ et $h_{\max} = 0,628\,\text{mm}$. La hauteur de la trace laissée par l'impact des particules sur l'écran vaut $\boxed{h_{\max} - h_{\min} = 0,558\,\text{mm}}$.

Application 2

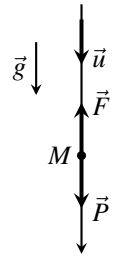
1. On détermine la dimension du coefficient de frottement : $[\beta] = \frac{[F]}{[v]^2} = \frac{\text{MLT}^{-2}}{(\text{LT}^{-1})^2} = \text{ML}^{-1}$.

Le coefficient β s'exprime en $\boxed{\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}}$. On a vu que le terme βv^2 est homogène à une force.

Sachant que le poids mg est une force, on propose la relation : $mg = \beta v_\ell^2 \iff \boxed{v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}}$.

Si v_ℓ est une vitesse alors $\frac{v_\ell}{g}$ est homogène à un temps : $\boxed{\tau = \sqrt{\frac{m}{\beta g}}}$.

2. Système : bille.
Référentiel : terrestre supposé galiléen.
Repère : axe vertical descendant orienté par $\vec{u}$.
Bilan des forces : poids $\vec{P}$, force de frottement $\vec{F}$.
PFD : $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{F}$.



On projette cette équation sur $\vec{u}$: $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \beta v^2 \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{m}v^2 = g}$.

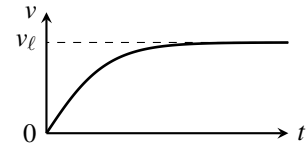
3. On écrit l'équation différentielle en séparant les variables v et t :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\beta}{m}\left(\frac{mg}{\beta} - v^2\right) \iff \frac{\mathrm{d}v}{v_\ell^2 - v^2} = \frac{\beta}{m}\mathrm{d}t$$

On intègre entre le point de départ ($v=0$, $t=0$) et un point quelconque (v,t) :

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v_\ell^2-v^2} = \int_0^t \frac{\beta}{m}\mathrm{d}t \iff \frac{1}{v_\ell}\mathrm{argth}\left(\frac{v}{v_\ell}\right) = \frac{\beta}{m}t \iff \boxed{v(t) = v_\ell \,\mathrm{th}\left(\frac{t}{\tau}\right)}$$

On trace l'allure du graphe de $t \mapsto v(t)$ sur la figure ci-contre. On observe un régime transitoire (qui dure quelques τ). En régime permanent la bille chute à la vitesse constante v_ℓ.



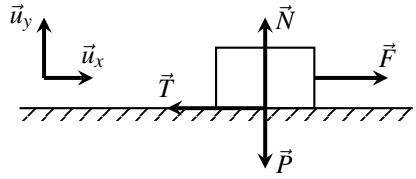
Application 3

Système : caisse.

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Repère : cartésien (Oxy)

Bilan des forces : poids $\vec{P}$, réaction normale $\vec{N}$ et tangentielle $\vec{T}$, force de traction $\vec{F}$.



PFS : On suppose que la caisse adhère au sol et on applique le principe fondamental de la statique : $\vec{0} = \vec{P}+\vec{N}+\vec{T}+\vec{F}$. On projette dans la base d'étude :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\|\vec{T}\| \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \|\vec{N}\| \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \iff \begin{cases} \|\vec{T}\| = F \\ \|\vec{N}\| = mg \end{cases}$$

Loi de l'adhérence : La caisse ne glisse pas tant que : $\|\vec{T}\| \leq f\|\vec{N}\| \iff F \leq fmg$.

La force de traction minimale qui permet de faire glisser la caisse est $\boxed{F_{\min} = fmg = 735\,\mathrm{N}}$.

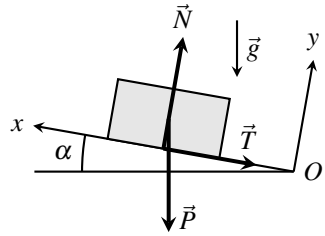
Application 4

Système : solide.

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Repère : cartésien (Oxy)

Bilan des forces : poids $\vec{P}$, réaction normale $\vec{N}$ et tangentielle $\vec{T}$, force de traction $\vec{F}$.



PFD : $m\vec{a} = \vec{P}+\vec{N}+\vec{T}$. On projette dans la base d'étude :

$$\begin{vmatrix} m\ddot{x} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\|\vec{T}\| \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \|\vec{N}\| \end{vmatrix} \iff \begin{cases} \ddot{x} = -g\sin\alpha - \dfrac{\|\vec{T}\|}{m} \\ \|\vec{N}\| = mg\cos\alpha \end{cases}$$

Loi du glissement : $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\| = fmg\cos\alpha$. On en déduit l'équation du mouvement : $\ddot{x} = -(\sin\alpha + f\cos\alpha)g$. On l'intègre avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = 0$:

$$\dot{x}(t) = -(\sin\alpha + f\cos\alpha)gt + v_0 \qquad \text{et} \qquad \boxed{x(t) = -\frac{1}{2}(\sin\alpha + f\cos\alpha)gt^2 + v_0 t}$$

2. Le solide s'arrête lorsque $\dot{x} = 0$, à la date $t_a = \dfrac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$.

Sa position est alors $x_a = x(t_a) = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$.

L'altitude h du solide vérifie : $\sin\alpha = \frac{h}{x_a} \iff \boxed{h = x_a \sin\alpha = \frac{v_0^2}{2g(1+f\,\text{cotan}\alpha)}}$.

3. Le raisonnement est similaire à celui de la question 1, à la différence que le solide glisse vers le bas donc la réaction tangentielle est orientée selon $+\vec{u}_x$. L'équation du mouvement s'écrit alors : $\ddot{x} = (-\sin\alpha + f\cos\alpha)g$. On l'intègre avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = x_m$ (on redéfinit l'origine des temps au début du glissement vers le bas).

$$\dot{x}(t) = (-\sin\alpha + f\cos\alpha)gt \qquad \text{et} \qquad x(t) = \frac{1}{2}(-\sin\alpha + f\cos\alpha)gt^2 + \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$$

Les solide retourne à son point de départ ($x = 0$) à la date $t_d = \frac{v_0}{g\sqrt{(\sin\alpha - f\cos\alpha)(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}$.

Sa vitesse est alors égale à : $\boxed{v_0' = \left|\dot{x}(t_d)\right| = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\sin\alpha + f\cos\alpha}}}$.

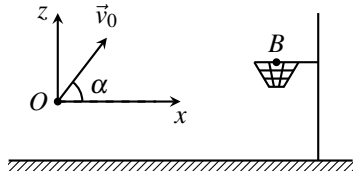
On constate que $v_0' < v_0$. Le solide repasse par sa position initiale avec une vitesse plus faible qu'au départ.

Exercice 1 : Tir à trois points

1. Système : ballon.

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Repère : cartésien (Oxz) avec origine au point de lancer.



Bilan des forces : poids $\vec{P}$.

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} \iff \vec{a} = \vec{g}$.

On projette dans la base d'étude : $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$.

On intègre avec les conditions initiales : $\dot{x}(0) = v_0\cos\alpha$, $\dot{z}(0) = v_0\sin\alpha$ et $x(0) = z(0) = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0\cos\alpha \\ \dot{z} = -gt + v_0\sin\alpha \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = v_0\cos(\alpha)t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t \end{cases}$$

On détermine l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha} \implies \boxed{z(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan(\alpha)\,x}$$

2. Le tir est réussi si le ballon atteint le point B, c'est-à-dire si $z(L) = H$.

$$H = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}L^2 + \tan(\alpha)L \iff \boxed{v_0 = \frac{L}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(L\tan\alpha - H)}} = 8{,}9\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

3. On cherche les valeurs de α qui respectent le critère $z(L) = H$:

$$H = -\frac{g}{2v_0^2}(1 + \tan^2\alpha)L^2 + \tan(\alpha)L \iff \tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{gL}\tan\alpha + 1 + \frac{2v_0^2H}{gL^2} = 0$$

On cherche les racines de cette équation du second degré vérifiée par $\tan\alpha$. Le discriminant vaut $\Delta = \frac{4v_0^4}{g^2L^2} - 4\left(1+\frac{2v_0^2H}{gL^2}\right)$. On trouve numériquement : $\Delta = 3,3 > 0$. Il y a deux racines réelles : $\tan\alpha = \frac{v_0^2}{gL} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$. Les angles correspondant valent : $\boxed{\alpha_1 = 68^\circ}$ et $\boxed{\alpha_2 = 31^\circ}$.

Remarque : En toute rigueur le tir est réussi si le ballon atteint B avec un mouvement **descendant**. On peut vérifier si c'est bien le cas en calculant $\dot{z}(L) = -\frac{g}{v_0\cos\alpha}L + v_0\sin\alpha$.

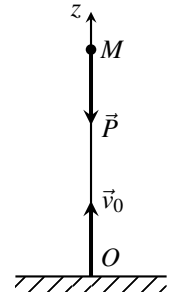
On fait l'application numérique avec α_1 et α_2 et on trouve dans les deux cas $\dot{z}(L) < 0$: les deux angles permettent de réussir le tir.

Exercice 2 : Chute verticale avec frottement

1. Système : point matériel.

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Repère : cartésien (Oz) vertical ascendant.



Bilan des forces : poids $\vec{P}$, force de frottement $\vec{F}$.

PFD : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}$.

On projette sur $\vec{u}_z$: $m\frac{dv_z}{dt} = -mg - \alpha v_z \iff \frac{dv_z}{dt} + \frac{\alpha}{m}v_z = -g$.

On résout cette équation différentielle du premier ordre.

Solution particulière : $\frac{\alpha}{m}v_p = -g \iff v_p = -\frac{mg}{\alpha} = -v_\ell$.

Solution générale : $v_z(t) = Ae^{-t/\tau} - v_\ell$.

Condition initiale : $v_z(0) = v_0 = A - v_\ell \iff A = v_0 + v_\ell$.

On conclut que $\boxed{v_z(t) = (v_0+v_\ell)e^{-t/\tau} - v_\ell}$.

On intègre à nouveau pour obtenir la position : $z(t) = -\tau(v_0+v_\ell)e^{-t/\tau} - v_\ell t + C$.

Condition initiale : $z(0) = 0 = -\tau(v_0+v_\ell) + C \iff C = \tau(v_0+v_\ell)$.

On a donc : $\boxed{z(t) = \tau(v_0+v_\ell)(1-e^{-t/\tau}) - v_\ell t}$.

2. L'ascension s'arrête lorsque $v_z = 0$, à la date $\boxed{t_{\text{sommet}} = \tau\ln\left(1+\frac{v_0}{v_\ell}\right)}$.

3. La hauteur du lancer s'identifie à $H = z(t_{\text{sommet}})$:

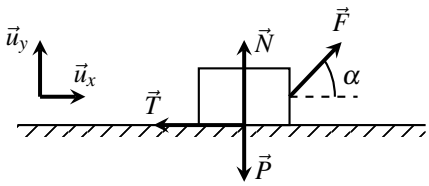
$$\begin{aligned} H &= \tau(v_0+v_\ell)\left(1-\frac{v_\ell}{v_0+v_\ell}\right) - v_\ell\tau\ln\left(1+\frac{v_0}{v_\ell}\right) \\ &= v_0\tau - v_\ell\tau\ln\left(1+\frac{v_0}{v_\ell}\right) \\ &= \boxed{v_\ell\tau(\xi - \ln(1+\xi))} \end{aligned}$$

Exercice 3 : Tir à la corde

1. Système : caisse.

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Repère : cartésien (Oxy).



Bilan des forces : poids $\vec{P}$, réaction normale $\vec{N}$ et tangentielle $\vec{T}$, force de traction $\vec{F}$.
PFS : On suppose que la caisse adhère au sol et on applique le principe fondamental de la statique : $\vec{0} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}$.
On projette dans la base d'étude :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\|\vec{T}\| \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \|\vec{N}\| \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F\cos\alpha \\ F\sin\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \iff \begin{cases} \|\vec{T}\| = F\cos\alpha \\ \|\vec{N}\| = mg - F\sin\alpha \end{cases}$$

Loi de l'adhérence : La caisse adhère au sol tant que :

$$\|\vec{T}\| \leq f\|\vec{N}\| \iff F\cos\alpha \leq f(mg - F\sin\alpha) \iff \boxed{F \leq F_{\min} = \frac{fmg}{\cos\alpha + f\sin\alpha}}$$

2. L'angle plus favorable est celui pour lequel la force $F_{\min}$ est la plus faible. On doit donc résoudre l'équation $F'_{\min}(\alpha) = 0$:

$$-fmg\frac{-\sin\alpha + f\cos\alpha}{(\cos\alpha + f\sin\alpha)^2} = 0 \iff \sin\alpha = f\cos\alpha \iff \boxed{\alpha = \arctan f = 27^\circ}$$

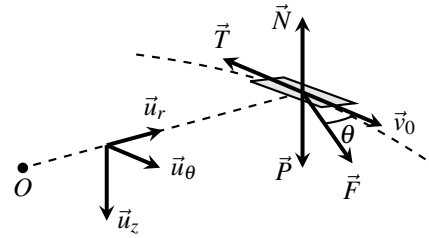
3. Dans le cas le plus favorable on trouve $\boxed{F_{\min} = 657\,\text{N}}$.

Si la force est horizontale ($\alpha = 0$) on a $F_{\min} = fmg = 735\,\text{N}$. Il y a un écart d'environ 10 % entre ces deux valeurs. **La direction de la force de traction a un impact non négligeable sur l'effort minimal qui permet de faire glisser la caisse**.

Exercice 4 : Traîneau tiré par des chiens

1. Le mouvement du traîneau est circulaire et uniforme donc : $\boxed{\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R}\vec{u}_r}$.

2. Système : traîneau.
Référentiel : terrestre supposé galiléen.
Repère : cylindrique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. On représente la situation en perspective sur la figure ci-contre.
Bilan des forces : poids $\vec{P}$, réaction normale $\vec{N}$ et tangentielle $\vec{T}$ de la glace, force de traction des chiens $\vec{F}$.



PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}$.
On projette dans la base d'étude :

$$\begin{vmatrix} -m\frac{v_0^2}{R} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\|\vec{N}\| \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -\|\vec{T}\| \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -F\sin\theta \\ F\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \iff \begin{cases} \frac{mv_0^2}{R} = F\sin\theta & (E_r) \\ \|\vec{T}\| = F\cos\theta & (E_\theta) \\ \|\vec{N}\| = mg & (E_z) \end{cases}$$

Loi du glissement : $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\| = fmg$.

En écrivant $\frac{(E_r)}{(E_\theta)}$ on trouve : $\boxed{\theta = \arctan\left(\frac{v_0^2}{fgR}\right)}$.

En écrivant $(E_r)^2+(E_\theta)^2$ on trouve $\boxed{F=\sqrt{\left(\frac{mv_0^2}{R}\right)^2+(fmg)^2}}$.

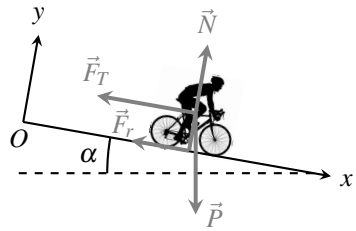
3. Les applications numériques donnent : $\boxed{\theta=36^\circ}$ et $\boxed{F=158\,\text{N}}$.

Exercice 5 : Cycliste en roue libre

1. Système : cycliste.

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Repère : cartésien (Oxy).



Bilan des forces : poids $\vec{P}$, réaction normale $\vec{N}$ de la route, force de résistance au roulement $\vec{F}_r$, force de frottement de l'air $\vec{F}_T$.

PFD : $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{P}+\vec{N}+\vec{F}_r+\vec{F}_T$.

Cinématique : le cycliste se déplace dans le sens des x croissants ; on écrit sa vitesse $\vec{v}=v\vec{u}_x$ et son accélération $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u}_x$. On projette le PFD dans la base d'étude :

$$\begin{vmatrix} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \|\vec{N}\| \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -f\|\vec{N}\| \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\beta v^2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

On obtient après simplification les équations : $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\beta}{m}v^2=g(\sin\alpha-f\cos\alpha) \\ \|\vec{N}\|=mg\cos\alpha \end{cases}$.

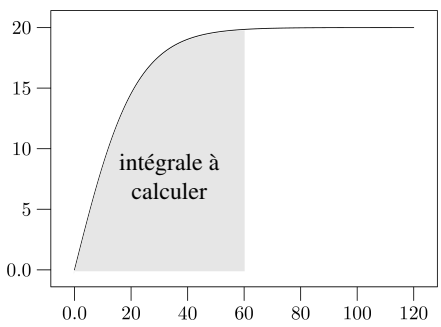
On identifie les paramètres a et b : $\boxed{a=\frac{\beta}{m}}$ et $\boxed{b=g(\sin\alpha-f\cos\alpha)}$.

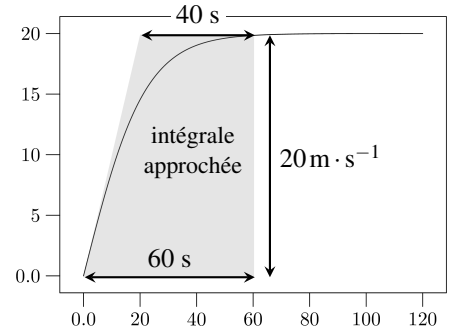
2. En régime permanent de vitesse $v=v_{\text{lim}}$ constante, l'accélération $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ est nulle :

$$\frac{\beta}{m}v_{\text{lim}}^2=g(\sin\alpha-f\cos\alpha) \iff \boxed{v_{\text{lim}}=\sqrt{\frac{mg(\sin\alpha-f\cos\alpha)}{\beta}}=20\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}=73\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}}$$

Sachant qu'une pente de 10% est typique d'un col de haute montagne, la valeur obtenue semble réaliste pour un cycliste en position "aérodynamique".

4.





On note τ la date à laquelle la tangente à l'origine croise l'asymptote ($\tau \simeq 20\,\text{s}$ par lecture graphique). On estime que le régime transitoire dure environ $3\tau = 60\,\text{s}$. La distance L_{RP} est alors définie par $L_{RP} = \int_0^{3\tau} v(t)\mathrm{d}t$. D'un point de vue géométrique il s'agit de l'aire sous la courbe entre $t = 0$ et $t = 3\tau$. On montre sur la figure en page précédente la façon dont on calcule cette intégrale de manière approchée. Notre valeur est légèrement surestimée.

On estime la distance L_{RP} en approchant l'aire sous la courbe par celle d'un trapèze de «base» $\Delta v = 20\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et de «hauteur moyenne» $\Delta t = \frac{60+40}{2} = 50\,\text{s}$:

$$L_{RP}[\text{m}] = 20 \times 50 = 1\,000 \implies \boxed{L_{RP} \sim 1\,\text{km}}$$

Exercice 6 : Balistique avec et sans frottement

1. Système : projectile.

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Repère : cartésien (Oxz).

Bilan des forces : poids $\vec{P}$.

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} \iff \vec{a} = \vec{g}$. On projette dans la base d'étude : $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$.

On intègre avec les conditions initiales : $\dot{x}(0) = v_0\cos\theta_0$, $\dot{z}(0) = v_0\sin\theta_0$ et $x(0) = z(0) = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0\cos\theta_0 \\ \dot{z} = -gt + v_0\sin\theta_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = v_0\cos(\theta_0)\,t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\theta_0)\,t \end{cases}$$

On détermine l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$t = \frac{x}{v_0\cos\theta_0} \implies \boxed{z(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x^2 + \tan(\theta_0)\,x}$$

2. Le sommet S de la trajectoire est atteint lorsque l'altitude z est maximale, c'est-à-dire pour l'abscisse x_S telle que $z'(x_S) = 0$. On résout cette équation :

$$-\frac{gx_S}{v_0^2\cos^2\theta_0} + \tan\theta_0 = 0 \iff x_S = \frac{v_0^2\cos\theta_0\sin\theta_0}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{2g}$$

L'altitude correspondante vaut $z_S = z(x_S) = \dfrac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g}$.

Les coordonnées de S sont : $\boxed{x_S = \dfrac{v_0^2\sin 2\theta_0}{2g}\ ,\ z_S = \dfrac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g}}$.

3. La portée du tir est la distance horizontale parcourue par le projectile avant que celui retombe au sol ($z = 0$). On résout : $z(x) = 0 \iff -\dfrac{gx}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\left(x - \dfrac{2v_0^2\cos\theta_0\sin\theta_0}{g}\right) = 0$.

L'altitude est nulle pour $x = 0$ (point de départ) et $\boxed{x = \ell = \dfrac{v_0^2\sin(2\theta_0)}{g}}$.

À vitesse v_0 fixée la portée est maximale lorsque $\sin(2\theta_0) = 1 \iff \boxed{\theta_0 = \pi/4}$.

4. La force de frottement s'écrit $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ donc : $[\alpha] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{\mathrm{MLT}^{-2}}{\mathrm{LT}^{-1}} \iff \boxed{[\alpha] = \mathrm{MT}^{-1}}$.
Le coefficient de frottement fluide α est homogène à une masse divisée par un temps. On peut donc construire un temps caractéristique τ de la manière suivante : $\boxed{\tau = \frac{m}{\alpha}}$.

5. On applique le PFD en tenant désormais compte de la force de frottement.
PFD : $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{F}$.

Cinématique : on note $\vec{v} = v_x\vec{u}_x + v_z\vec{u}_z$. L'accélération s'écrit alors $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z$.
On projette le PFD dans la base d'étude :

$$\begin{vmatrix} m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha v_x \\ -\alpha v_z \end{vmatrix} \iff \begin{cases} \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \frac{v_x}{\tau} = 0 & (E_x) \\ \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \frac{v_z}{\tau} = -g & (E_z) \end{cases}$$

On résout (E_x) avec la condition initiale $v_x(0) = v_0\cos\theta_0$: $v_x = v_0\cos\theta_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$.
On intègre à nouveau avec la condition initiale $x(0) = 0$: $\boxed{x(t) = \tau v_0\cos\theta_0(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})}$.

On résout (E_z) avec la condition initiale $v_z(0) = v_0\sin\theta_0$: $v_z = (v_0\sin\theta_0 + g\tau)\mathrm{e}^{-t/\tau} - g\tau$.
On intègre avec la condition initiale $z(0) = 0$: $\boxed{z(t) = -g\tau t + \tau(v_0\sin\theta_0 + g\tau)\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$.

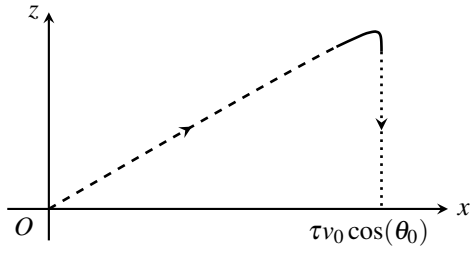
6. En faisant l'approximation $1 - \mathrm{e}^{-t/\tau} \simeq \frac{t}{\tau}$ on trouve : $\boxed{\begin{cases} x(t) \simeq v_0\cos(\theta_0)t \\ z(t) \simeq v_0\sin(\theta_0)t \end{cases}}$.
En première approximation le mouvement est **rectiligne uniforme, à la vitesse initiale** $\vec{v}_0$.

7. Dans le domaine $t \gg \tau$ on peut faire l'approximation $1 - \mathrm{e}^{-t/\tau} \simeq 1$, ce qui conduit à :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) \simeq \tau v_0\cos\theta_0 \\ z(t) \simeq -g\tau t + \tau(v_0\sin\theta_0 + g\tau) \end{cases}} \implies \begin{cases} \dot{x}(t) \simeq 0 \\ \dot{z}(t) \simeq -g\tau \end{cases}$$

En première approximation le mouvement est **rectiligne uniforme** de vitesse $\vec{v} = -g\tau\vec{u}_z$ dans le plan $x = \tau v_0\cos(\theta_0)$. On identifie **une vitesse limite** $\boxed{v_\infty = g\tau = \frac{mg}{\alpha}}$.

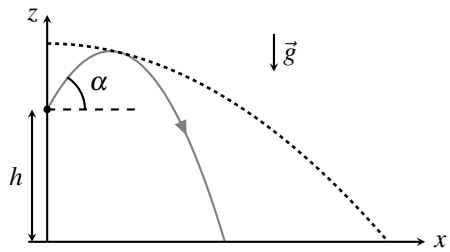
8. On trace une allure de trajectoire dans le cas où le temps de vol est grand devant τ.
1ère phase (tirets) : mouvement quasi-rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}_0$.
2ème phase (trait plein) : variation du vecteur vitesse, la trajectoire est courbée.
3ème phase (pointillés) : mouvement quasi-rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v} = -v_\infty\vec{u}_z$.

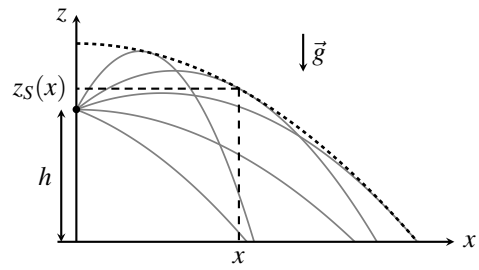


Exercice 7 : Courbe de sécurité

Tout d'abord on étudie la trajectoire d'un projectile lancé dans une direction α quelconque par rapport à l'horizontale ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$).

En appliquant le PFD on montre rapidement que pour un angle α donné l'équation cartésienne de la trajectoire a pour expression : $z_\alpha(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan(\alpha)x + h$.





Pour déterminer l'équation cartésienne de la courbe de sécurité on fixe une abscisse x quelconque. L'altitude $z_S(x)$ de la courbe de sécurité, en x, correspond à l'altitude la plus élevée parmi tous les tirs possibles pour des angles α allant de 0 à $\pi/2$. Autrement dit elle correspond **au maximum de** $\alpha \mapsto z_\alpha(x)$, à x fixé.

On trouve l'angle α qui maximise l'altitude en résolvant $\frac{\mathrm{d}z_\alpha(x)}{\mathrm{d}\alpha} = 0$ (à x fixé) :

$$-\frac{g}{v_0^2}\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}x^2 + \frac{x}{\cos^2\alpha} = 0 \iff \tan\alpha = \frac{v_0^2}{gx}$$

En réinjectant cette expression dans celle de $z_\alpha(x)$ on obtient l'équation cartésienne de la courbe de sécurité :

$$\boxed{z_S(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g} + h}$$