Correction du DNS 7

EXERCICE 1

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(-x) = \cos(-3x)\cos^3(-x) = \cos(3x)\cos^3(x) = f(x)$$

donc f est paire, et

$$f(x+\pi) = \cos(3x+3\pi)\cos^3(x+\pi) = -\cos(3x)(-\cos(x))^3 = \cos(3x)\cos^3(x) = f(x)$$

donc f est π-périodique.

Puisque f est π-périodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur π, par exemple sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On obtiendra alors la courbe entière par translations. De plus, f est paire, donc il suffit de l'étudier sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: on obtiendra la partie de la courbe correspondant à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.

2) a) La fonction f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$f'(x) = -3\sin 3x \cos^3 x - 3\cos 3x \cos^2 x \sin x = -3\cos^2 x(\sin 3x \cos x + \sin x \cos 3x) = -3\cos^2 x \sin 4x$$

en utilisant une formule d'addition : $\sin 4x = \sin(3x+x) = \sin 3x \cos x + \sin x \cos 3x$.

b) On a donc $f'(x) = 0$ si et seulement si $\cos^2 x = 0$ ou $\sin 4x = 0$. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

et :

$$\sin 4x = 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2}\right).$$

Le signe de $f'(x)$ est l'opposé de celui de $\sin 4x$, donc $f'(x) < 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $f'(x) > 0$ sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Dans le tableau de variation on ajoute $f(0) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = -\frac{1}{4}$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

3) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos 3x \cos^3 x = 0 \\ &\Leftrightarrow (\cos 3x = 0 \text{ ou } \cos x = 0) \\ &\Leftrightarrow \left(3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \ (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \ (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

car on peut écrire $\frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 3k\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + (3k+1)\frac{\pi}{3}$.

Les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses ont donc pour coordonnées $\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, 0\right)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 4

1) La fonction Arccos est définie sur $[-1, 1]$. Or, pour tout réel x on a :

$$-1 \leqslant \frac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 - x^2 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1 + x^2,$$

ce qui est toujours vrai. Le premier membre de l'égalité $(*)$ est donc bien défini.

Par ailleurs la fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, donc le second membre de $(*)$ est bien défini également.

2) a) On a $f(0) = \text{Arccos}\, 1 = 0$ et $f(1) = \text{Arccos}\, 0 = \frac{\pi}{2}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

c) La fonction Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Or, pour tout réel x on a :

$$-1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < 1 \Leftrightarrow -1-x^2 < 1-x^2 < 1+x^2.$$

On a toujours $-1-x^2 < 1-x^2$, mais on a $1-x^2 < 1+x^2$ si et seulement si $x \neq 0$.

La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

d) Pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{-4x}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}} \\ &= \frac{4x}{(1+x^2)\sqrt{1+2x^2+x^4-(1-2x^2+x^4)}} \\ &= \frac{4x}{(1+x^2)\sqrt{4x^2}} \\ &= \frac{4x}{2x(1+x^2)} \text{ (car } x>0) \\ &= \frac{2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

e) Pour tout $x > 0$ on a $f'(x) = 2\,\mathrm{Arctan}'(x)$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\,x + C$ pour tout $x > 0$. De plus $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$ et $2\,\mathrm{Arctan}\,1 = \dfrac{\pi}{2}$, donc $C = 0$ et donc $f(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\,x = 2\,\mathrm{Arctan}\,|x|$ pour tout $x > 0$.

Par ailleurs la fonction f est paire, donc pour tout $x < 0$ on a $f(x) = f(-x) = 2\,\mathrm{Arctan}(-x) = 2\,\mathrm{Arctan}\,|x|$.

Enfin l'égalité $(*)$ est également vraie pour $x = 0$ car $f(0) = 0$. Elle est donc vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos(2t) = \cos(t+t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - (1-\cos^2 t) = 2\cos^2 t - 1$$

et si t n'est pas congru à $\pi/2$ modulo π on a

$$1 + \tan^2 t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

b) Pour tout réel t non congru à $\pi/2$ modulo π on a

$$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = \frac{2}{1+\tan^2 t} - 1 = \frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}.$$

c) Soit x un réel. Alors $\mathrm{Arctan}\,|x| \in [0, \pi/2[$ donc n'est pas congru à $\pi/2$ modulo π. La formule précédente donne

$$\cos(2\,\mathrm{Arctan}\,|x|) = \frac{1-\tan^2(\mathrm{Arctan}\,|x|)}{1+\tan^2(\mathrm{Arctan}\,|x|)} = \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

De plus $2\,\mathrm{Arctan}\,|x| \in [0, \pi[$ donc on a bien

$$2\,\mathrm{Arctan}\,|x| = \mathrm{Arccos}\,\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$