Corrigé DM9

Exercice : Balle lancée sur un plan incliné

1. $\boxed{\vec{P} = mg(-\sin\alpha\,\vec{u}_x - \cos\alpha\,\vec{u}_y)}$

2. $\boxed{\vec{V}_0 = V_0(\cos\beta\,\vec{u}_x + \sin\beta\,\vec{u}_y)}$

3. On applique le PFD à la balle dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a} = \vec{P}$ car il s'agit d'un mouvement de chute libre. On projette le PFD dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mg\sin\alpha \\ m\ddot{y} = -mg\cos\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{\ddot{x} = -g\sin\alpha} \\ \boxed{\ddot{y} = -g\cos\alpha} \end{cases}$$

4. Les conditions initiales sur la vitesse sont $\dot{x}(0) = V_0\cos\beta$ et $\dot{y}(0) = V_0\sin\beta$. On en déduit, par intégration, l'expression de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -gt\sin\alpha + V_0\cos\beta \\ \dot{y}(t) = -gt\cos\alpha + V_0\sin\beta \end{cases}$$

Les conditions initiales sur la position sont $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$. On en déduit, par une nouvelle intégration, l'expression de $x(t)$ et $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = (-\frac{1}{2}g\sin\alpha)\,t^2 + (V_0\cos\beta)\,t \\ y(t) = (-\frac{1}{2}g\cos\alpha)\,t^2 + (V_0\sin\beta)\,t \end{cases}$$

On obtient le résultat attendu, avec $\boxed{A = -\frac{g}{2}}$ et $\boxed{B = V_0}$.

5. La balle rebondit sur le plan incliné lorsque $y = 0$, c'est-à-dire à la date t telle que :

$$\frac{1}{2}g\cos\alpha\,t^2 = V_0\sin\beta\,t \iff t = \frac{2V_0\sin\beta}{g\cos\alpha}$$

À cette date-là, les coordonnées de la balle sont les suivantes :

$$\boxed{x_C = \frac{2V_0^2\sin\beta}{g\cos^2\alpha}\left(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\right) = \frac{2V_0^2\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\alpha}} \text{ et } \boxed{y_C = 0}$$

6. À la date $t = \frac{2V_0\sin\beta}{g\cos\alpha}$:

$$\boxed{v_{Cx} = \dot{x}_C = V_0\cos\beta(1 - 2\tan\beta\tan\alpha)} \text{ et } \boxed{v_{Cy} = \dot{y}_C = -V_0\sin\beta}$$

Corrigé DM9

Exercice : Balle lancée sur un plan incliné

1. $\boxed{\vec{P} = mg(-\sin\alpha\,\vec{u}_x - \cos\alpha\,\vec{u}_y)}$

2. $\boxed{\vec{V}_0 = V_0(\cos\beta\,\vec{u}_x + \sin\beta\,\vec{u}_y)}$

3. On applique le PFD à la balle dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\vec{a} = \vec{P}$ car il s'agit d'un mouvement de chute libre. On projette le PFD dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mg\sin\alpha \\ m\ddot{y} = -mg\cos\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{\ddot{x} = -g\sin\alpha} \\ \boxed{\ddot{y} = -g\cos\alpha} \end{cases}$$

4. Les conditions initiales sur la vitesse sont $\dot{x}(0) = V_0\cos\beta$ et $\dot{y}(0) = V_0\sin\beta$. On en déduit, par intégration, l'expression de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -gt\sin\alpha + V_0\cos\beta \\ \dot{y}(t) = -gt\cos\alpha + V_0\sin\beta \end{cases}$$

Les conditions initiales sur la position sont $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$. On en déduit, par une nouvelle intégration, l'expression de $x(t)$ et $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = (-\frac{1}{2}g\sin\alpha)\,t^2 + (V_0\cos\beta)\,t \\ y(t) = (-\frac{1}{2}g\cos\alpha)\,t^2 + (V_0\sin\beta)\,t \end{cases}$$

On obtient le résultat attendu, avec $\boxed{A = -\frac{g}{2}}$ et $\boxed{B = V_0}$.

5. La balle rebondit sur le plan incliné lorsque $y = 0$, c'est-à-dire à la date t telle que :

$$\frac{1}{2}g\cos\alpha\,t^2 = V_0\sin\beta\,t \iff t = \frac{2V_0\sin\beta}{g\cos\alpha}$$

À cette date-là, les coordonnées de la balle sont les suivantes :

$$\boxed{x_C = \frac{2V_0^2\sin\beta}{g\cos^2\alpha}\left(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\right) = \frac{2V_0^2\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\alpha}} \text{ et } \boxed{y_C = 0}$$

6. À la date $t = \frac{2V_0\sin\beta}{g\cos\alpha}$:

$$\boxed{v_{Cx} = \dot{x}_C = V_0\cos\beta(1 - 2\tan\beta\tan\alpha)} \text{ et } \boxed{v_{Cy} = \dot{y}_C = -V_0\sin\beta}$$