

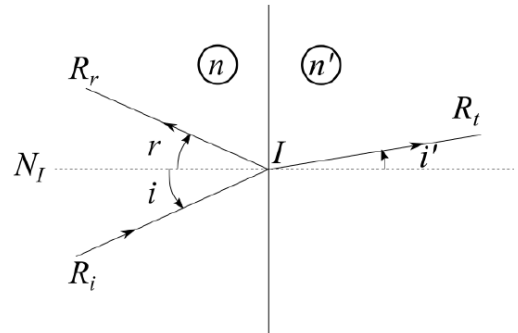
Exercice 1 : fibre optique.

Généralités.

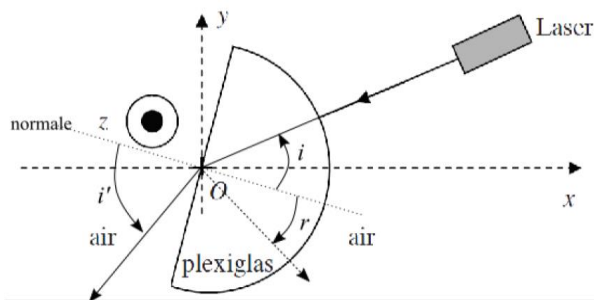
- Les lois de Snell Descartes sur la réflexion :
 - ✓ Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence.
 - ✓ Le rayon réfléchi est symétrique du rayon incident, autrement dit, l'angle de réflexion que fait le rayon réfléchi avec la normale à la surface est de même valeur absolue et de signe opposé. $r = -i$

Les lois de Snell-Descartes sur la réfraction :

- ✓ Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence.
- ✓ L'angle de réfraction que fait le rayon réfracté avec la normale à la surface vérifie : $n \sin i = n' \sin i'$



- Schéma :



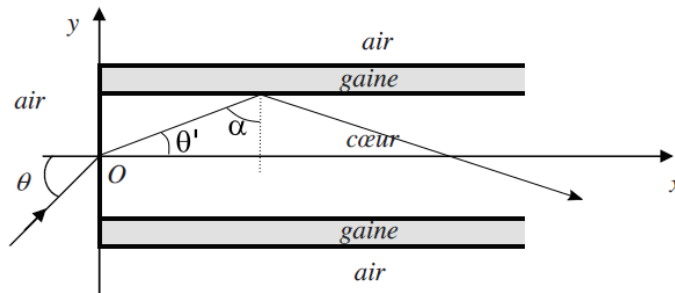
On est susceptible avec ce système expérimental d'observer le phénomène de réflexion totale sur l'interface plane plexiglass-air, pour laquelle la lumière traverse dans le sens milieu le plus réfringent vers le milieu le moins réfringent.

La transmission d'un rayon est possible si : $n_{plexi} \sin i = \sin i'$ le cas limite correspond à $i = i_L$ quand $i' = \pi/2$ ce qui donne :

$$\sin i_L = \frac{1}{n_{plexi}} \text{ et } i_L = \arcsin\left(\frac{1}{n_{plexi}}\right)$$

La fibre optique à saut d'indice.

- Le rayon pénètre toujours dans la fibre en O car on passe de l'air au verre du cœur avec ($1 < n_c$). Ce rayon est alors réfléchi totalement sur l'interface cœur gaine ($n_c > n_g$) si l'angle d'incidence α est supérieur à i_L ce qui est le cas si $\theta < \theta_L$ à déterminer dans la question suivante.



- La condition de réflexion totale est $\alpha > i_L$ avec $\sin i_L = \frac{n_g}{n_c}$.

Dans le triangle rectangle, on obtient alors : $\theta' + \alpha + \frac{\pi}{2} = \pi$ et donc $\theta' = \frac{\pi}{2} - \alpha$

On exploite alors la loi de Snell-Descartes $\sin \theta = n_c \sin \theta' = n_c \cos(\alpha)$

Lorsque α est minimal égale à i_L pour assurer la réflexion totale, $\cos \alpha$ est maximal et donc θ est majoré par une valeur θ_L telle que $\sin \theta < \sin \theta_L = n_c \cos(i_L)$

puisque $\sin(i_L) = \frac{n_g}{n_c}$, $\cos(i_L) = \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}$ et finalement $\sin \theta < \sin \theta_L = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$

Ce paramètre est appelé **ouverture numérique** de la fibre et sa valeur numérique est ici : $\sin \theta_L = 0,21$

- Le rayon traversant la fibre le plus rapidement est celui le long de l'axe de la fibre. On en déduit que

$$L_{\min} = L \text{ et } T_1 = \frac{n_c L}{c}$$

6. Le rayon traversant la fibre le plus lentement est celui incliné de l'angle θ_L' tel que $\cos \theta_L' = \sin(i_L) = \frac{n_g}{n_c}$. La distance parcourue est la somme des segments tous inclinés de l'angle θ_L'

par rapport à l'axe de la fibre qu'on établit à $L_{\max} = L / \cos(\theta_L')$ ce qui donne $T_2 = \frac{n_c^2 L}{c n_g}$

7. On en déduit $\delta T = T_2 - T_1 = \frac{n_c L}{c} \left(\frac{n_c}{n_g} - 1 \right)$ A.N : $\delta T = 5.10^{-7} s$

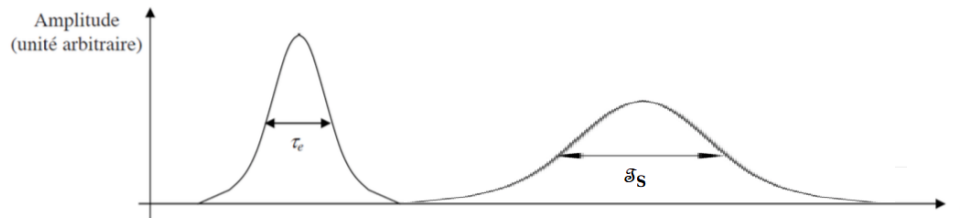
8. On souhaite que les impulsions ne se recouvrent pas, il faut donc que la durée ΔT entre deux impulsions en entrée soit supérieure à l'étalement δT des impulsions lorsqu'elles traversent la fibre afin que la fin d'une impulsion arrive avant le début de l'impulsion suivante.

On en déduit que $\Delta T > \Delta T_{\min} = \delta T$ et donc $D < D_{\max} = \frac{1}{\delta T} = \frac{n_g c}{n_c L (n_c - n_g)}$

9. Pour un débit fixé D, la longueur maximale de la fibre s'exprime $L_{\max} = \frac{n_g c}{n_c D (n_c - n_g)} \approx 2,0.10^2 m$

Cette distance est bien trop courte pour que la technologie de fibre à saut d'indice permette le transport d'information à haut débit sur des distances nationales ou internationales.

10. Si l'impulsion présente une durée en entrée τ_e et qu'elle est étalée sur une durée δT lors de la propagation dans la fibre, un ordre de grandeur de la durée en sortie est $\tau_s = \tau_e + \delta T$



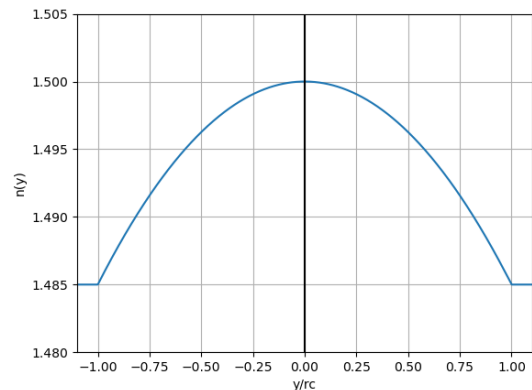
La fibre optique à gradient d'indice.

11. On évalue $n(0) = n_c = 1,500$; $n(r_c) = n_g = 1,485$ et on obtient l'allure ci-contre pour la courbe.

12. La loi de SD sur la réfraction lie les angles et les indices dans les différentes couches :

$$n_{j-1} \sin i_{j-1} = n_j \sin i_j = n_{j+1} \sin i_{j+1}$$

Dans chaque couche, on observe que $i_j + \varphi_j = \pi/2$ et on en déduit que $n_j \cos \varphi_j = Cste$ et puisque l'indice évolue de manière continue en fonction de y, on aboutit finalement à $n(y) \cos \varphi(y) = Cste$



13. On fait l'hypothèse que la forme proposée est une solution. On calcule les deux premières dérivées :

$$\frac{dy}{dx} = -Ak \sin(kx + \varphi) \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -Ak^2 \cos(kx + \varphi) \quad \text{et en injectant dans l'équation on}$$

obtient : $k^2 = \frac{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}{(r_c \cos \theta_0)^2}$. L'expression est donc bien solution de l'équation différentielle si $k = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}}{|r_c \cos \theta_0|}$

14. L'ouverture numérique ne dépend que de l'indice optique au point d'entrée, donc elle est la même pour les 2 fibres. L'intérêt est que cette grandeur ne dépend pas de la technologie utilisée et donc on peut hybrider les installations.

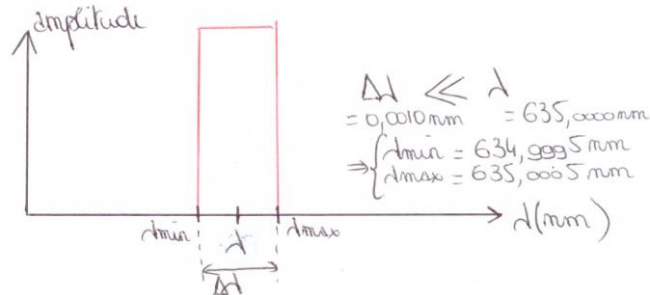
15. On fait l'application numérique : $\delta T' = 2ns$ qu'on doit comparer à $\delta T = 5.10^{-7} s$. $\delta T'$ est 250 fois plus faible que δT et donc les fibres à gradient d'indice pourront être ininterrompues sur les distances d'environ $250.L_{\max}$ soit environ 50km. Cette technologie est déjà beaucoup plus employable dans un réseau à l'échelle nationale.

Pertes associées à l'usage de la fibre optique.

19. On fait une application numérique : $A = \frac{10}{L} \log_{10} \left(\frac{\phi_f}{\phi_i} \right) = -0,2 \text{ dB/km}$

20. On souhaite que $\left(\frac{\phi_f}{\phi_i} \right) \geq 10^{-2}$. Il faut donc que $L = \frac{10}{A} \log_{10} \left(\frac{\phi_f}{\phi_i} \right)$ vérifie : $L < L_{\max} = -\frac{20}{A} = 100 \text{ km}$

21. Sur la courbe fournie, on observe que l'atténuation est minimale lorsque la longueur d'onde de la lumière envoyée dans la fibre est proche de $1,6 \mu\text{m}$ ce qui explique l'emploi de lumière dans ce domaine pour minimiser les pertes de signal. Cette longueur d'onde de $1,6 \mu\text{m}$ classe la lumière utilisée dans le domaine des infra-rouge.



22. (a)

22(b) La vitesse pour la longueur d'onde λ est $v(\lambda) = \frac{c}{n(\lambda)}$ d'où $\tau(\lambda) = \frac{L}{v(\lambda)} = \frac{L}{c} n(\lambda)$ et $\tau(\lambda) = \frac{L}{c} \left(A + \frac{B}{\lambda^2} \right)$

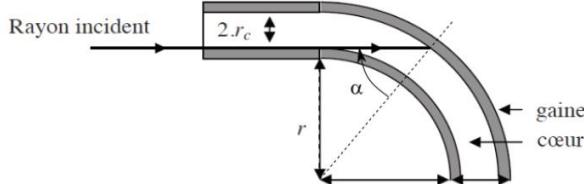
22(c) Pour la longueur d'onde minimale $\lambda_{\min} = \lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}$ le temps maximal est $\tau_{\max} = \frac{L}{c} \left(A + \frac{B}{\left(\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2} \right)^2} \right)$

Pour la longueur d'onde maximale $\lambda_{\max} = \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}$ le temps minimal est $\tau_{\min} = \frac{L}{c} \left(A + \frac{B}{\left(\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2} \right)^2} \right)$

On obtient donc $\Delta\tau = \tau_{\max} - \tau_{\min} = \frac{LB}{c} \left(\frac{1}{\left(\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2} \right)^2} - \frac{1}{\left(\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2} \right)^2} \right)$ soit $\Delta\tau = \frac{LB}{c} \left(\frac{2\lambda\Delta\lambda}{\left(\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2} \right)^2 \left(\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2} \right)^2} \right)$

et avec $\Delta\lambda \ll \lambda$ on obtient bien $\Delta\tau = \tau_{\max} - \tau_{\min} = \frac{2LB\Delta\lambda}{c\lambda^3}$

22(d) Ordre de grandeur $\Delta\tau = 5 \cdot 10^{-12} \text{ s}$ c'est tout petit.



23.

Pour que la perte de courbure soit évitée il faut que l'angle d'incidence α sur l'interface cœur-gaine reste supérieur à l'angle limite i_L .

Dans la géométrie étudiée, on observe que $\sin \alpha = \frac{r}{r + r_g + r_c}$ et on rappelle que $\sin i_L = \frac{n_g}{n_c}$

Alors $\alpha > i_L$ implique $\sin \alpha > \sin i_L$ ce qui donne $\frac{r}{r + r_g + r_c} > \frac{n_g}{n_c}$

d'où $r > r_{\min} = \frac{n_g}{n_c - n_g} (r_g + r_c)$ A.N : $r_{\min} = 10 \text{ cm}$. Dans une installation domestique, on évitera de tordre la fibre avec des rayons de courbure inférieur à cette valeur ce qui n'est pas toujours évident.

Exercice 2 : appareil photographique numérique à la mer.

1. Les conditions de Gauss sont les suivantes :

Les rayons lumineux considérés sont peu inclinés par rapport à l'axe optique. L'angle entre le rayon lumineux incident et l'axe optique ne doit pas excéder en pratique les 10° .

Les rayons lumineux sont proches de l'axe optique. La distance entre le rayon lumineux et l'axe optique au voisinage de la lentille devra être petite devant la distance focale.

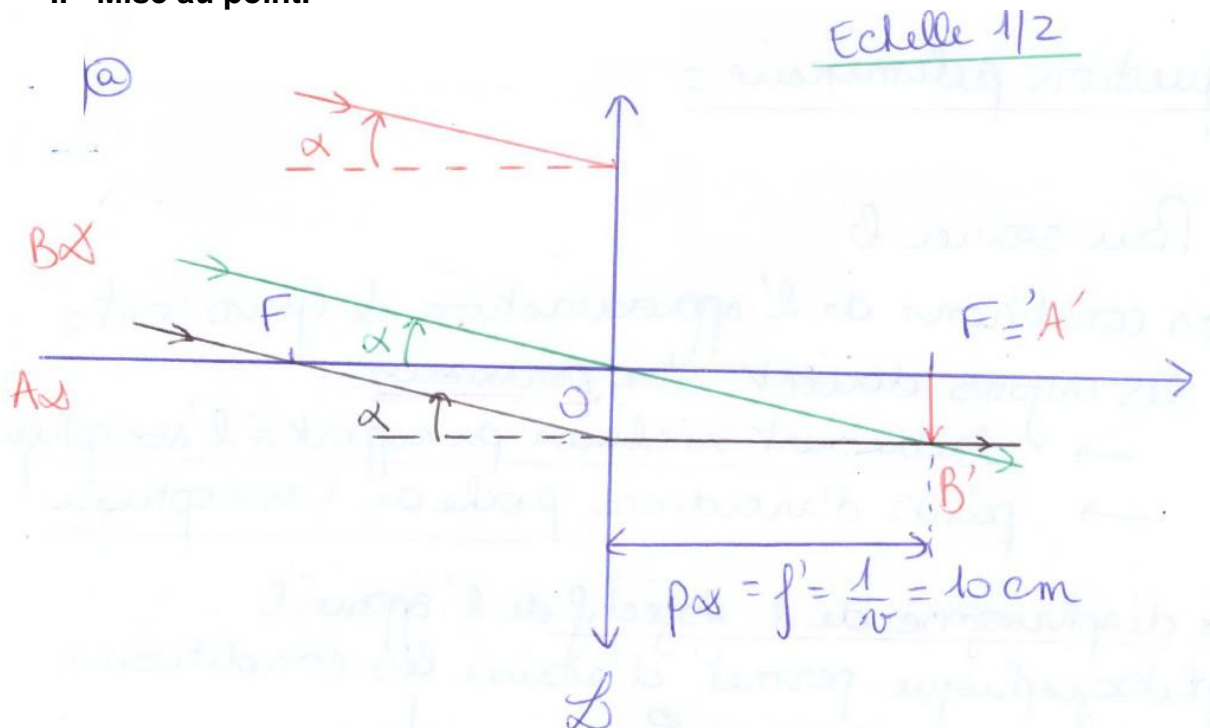
Le diaphragme de l'appareil photo permet de s'assurer que les rayons lumineux acceptés dans l'appareil sont paraxiaux, c'est-à-dire conformes aux conditions de Gauss.

Lorsqu'on se place dans les conditions de Gauss, les lentilles minces sont :

Stigmatique au sens approché du terme : les rayons lumineux issus de A passent au voisinage de A' après avoir traversé le système optique.

Aplanétique au sens approché du terme. Il donne d'un objet étendu dans un plan de front, une image située au voisinage d'un un (autre) plan de front du système optique.

I. Mise au point.



2(b) On observe que l'image se place dans le plan focal image de la lentille alors $p_\infty = f' = 10\text{cm}$

2(c) en utilisant la R. C. de Descartes, on note $\overline{OA} \rightarrow \infty$ et $\frac{1}{\overline{OA}} \rightarrow 0$ d'où $p_\infty = \overline{OA}' = f' = 10\text{cm}$

3(a) voir début de page suivante.

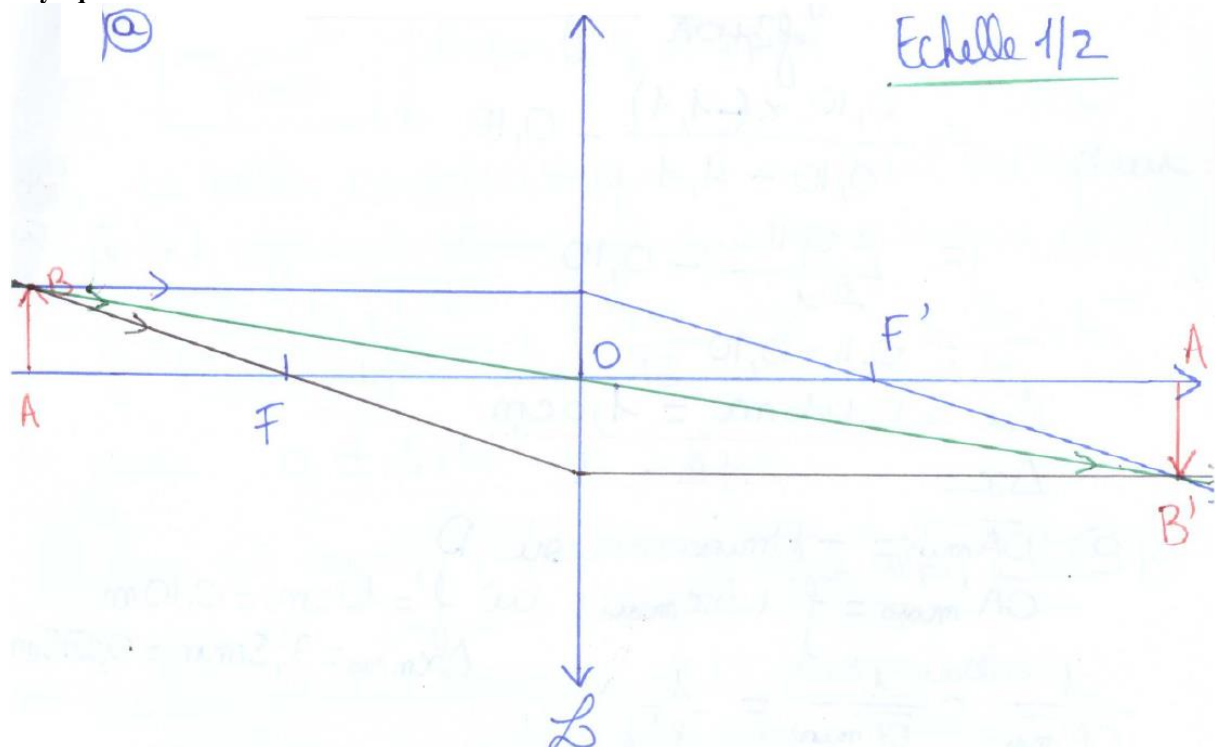
3(b) On observe sur la construction ci-dessous que A' est situé après F' sur la figure. Il faudra donc éloigner le capteur de la lentille pour faire le point sur un objet à distance finie.

4. (a) et (b) Pour une mise au point effectuée entre un objet situé à $\overline{OA} = -D_{\min}$ et une image située à $\overline{OA}' = f' + \Delta x_{\max}$

On traduit $-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA}'} = \frac{1}{f'}$ en $\frac{1}{D_{\min}} + \frac{1}{f' + \Delta x_{\max}} = \frac{1}{f'}$ d'où $D_{\min} = \frac{(f' + \Delta x_{\max})f'}{\Delta x_{\max}}$ A.N. : $D_{\min} = 1,4\text{m}$

5. Pour une surface S, contenant N pixels, la surface d'un pixel est S/N. Si on suppose des pixels carrés de

côté a accolés les uns aux autres : $a = \sqrt{\frac{S}{n}} \approx 7.10^{-3} \text{mm} \approx 7 \mu\text{m}$



6. (a) Définition du grandissement $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ la relation de Descartes donne alors $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

6(b) On introduit la relation de conjugaison : $-\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{f'}$ ce qui donne $\overline{OA'} = \frac{f' \overline{OA}}{f' + \overline{OA}}$ et $\gamma = \frac{f'}{f' + \overline{OA}}$

7. (a) le grandissement sera donc de l'ordre de $\gamma \approx \frac{f'}{OA} = -5 \cdot 10^{-2}$ l'image sera 20 fois plus petite que l'objet et elle sera renversée.

7(b) La taille de la sonnette du vélo est de l'ordre de quelques centimètres, fixons là à 5cm.

7(c) On en déduit l'ordre de grandeur suivant pour l'image de la sonnette sur le capteur

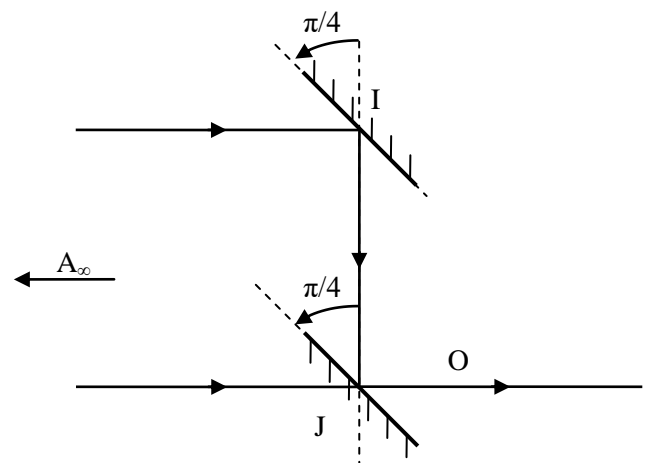
$$\overline{A'B_1'} \approx \frac{f'}{OA} = -2,5 \cdot 10^{-3} m$$

8. Le vélo est à une distance de $D_{\min} < D = 2m < D_{\max}$, la prise de vue est réalisable.

La taille de l'image de la sonnette sur la caméra est de 3mm soit 1/8 des 24mm pour la taille donnée du capteur. Il est bien raisonnable de penser que la photo a été prise avec cet appareil.

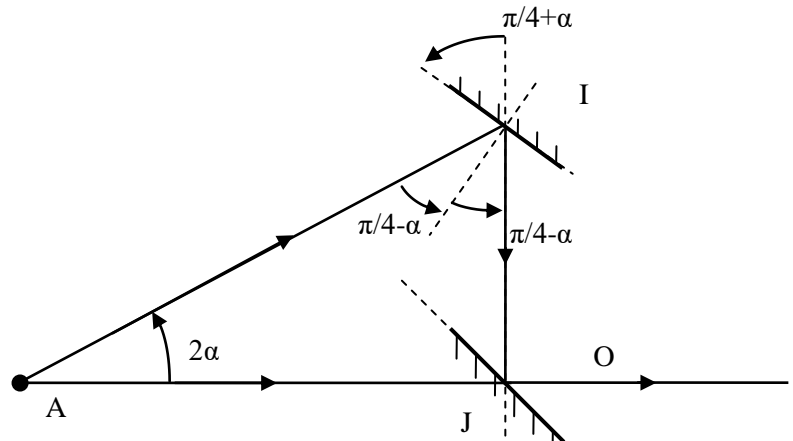
II. Télémètre.

9. Les rayons issus d'un point A_∞ sont parallèles entre eux. Lorsque M_1 est incliné d'un angle $\pi/4$ il renvoie d'après les lois de Snell-Descartes un rayon dirigé selon (IJ) qui se réfléchit sur M_2 en repartant dans une direction parallèle au rayon direct $A_\infty J$. Les deux images vont finalement se superposer en sortie du système de visée.



10. Pour un point objet A situé à distance finie D, on souhaite que le miroir M₁ renvoie un rayon dans la direction de la droite (IJ) avec un miroir incliné d'un angle $\pi/4+\alpha$. L'angle de réflexion sur M₁ est alors $\pi/4-\alpha$, l'angle d'incidence est de $\alpha-\pi/4$. On en déduit dans le triangle rectangle AIJ que l'angle d'inclinaison du rayon (AI) par rapport au rayon direct (AJ) est de 2α . On obtient finalement :

$$\tan(2\alpha) = \frac{a}{D} \text{ et } \alpha = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{a}{D}\right)$$



11. Pour la sonnette, on avait la mesure $D=2,0\text{m}$, on nous donne $a=9,0\text{cm}$, on obtient $\alpha = 1^{\circ}17'$ ce qui est un angle très petit, mais cohérent avec la précision de réglage indiqué dans l'énoncé, d'une minute d'arc.

Elements attendus dans la RP.

Pour la résolution de problème :

- Analyse des données fournies par la photographie : La durée écoulée depuis l'explosion est $\Delta t \approx 25\text{ms}$; le rayon du « champignon atomique » est $R \approx 130\text{m}$ en faisant une mesure du diamètre sur l'image et en faisant une loi d'échelle avec les 100m indiqués.
- Connaissance personnelle : la masse volumique de l'air dans les conditions usuelles de température et de pression est $\rho \approx 1,0\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.
- Analyse dimensionnelle :

$$[E] = [mv^2] = ML^2T^{-2} ; [\rho] = ML^{-3} ; [\Delta t] = T \text{ et } [R] = L$$

On fait l'hypothèse que l'énergie s'écrit sous la forme : $E = k\rho^a R^b (\Delta t)^c$ qu'on traduit en terme de dimension pour obtenir un système qu'on résout pour obtenir : $E = k\rho R^5 (\Delta t)^{-2}$

En prenant $k=1$ comme indiqué : $E \approx 6.10^{13}\text{J}$ soit l'équivalent de 15000 tonnes de TNT. L'ordre de grandeur semble fou mais il est cohérent avec les estimations faites à l'époque et qu'on trouve sur de nombreux sites (de référence ou non...) sur internet.