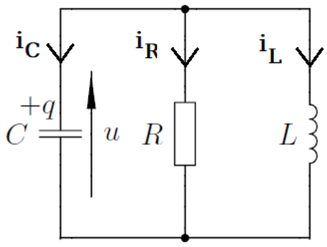
Exercice d'application directe du cours : RLC parallèle.



1. Le condensateur est chargé avec une tension U_O sur l'intervalle t<0. Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur $\boxed{u\left(t=0^+\right)=u\left(t=0^-\right)=U_O}$

Le courant dans la bobine est nul sur l'intervalle t<0. Par continuité de l'intensité traversant une bobine, $i_L(t=0^+)=0$. Le courant dans la résistance soumise à une tension U_O présente une intensité $i_R(t=0^+)=U_O/R$ et par la loi des nœuds $\boxed{i_C\left(t=0^+\right)=-\dfrac{U_O}{R}}$

2. On écrit la seule loi de structure ici, c'est la loi des nœuds $i_C(t)+i_R(t)+i_L(t)=0$

Relations caractéristiques des composants $i_C(t)=C\dfrac{du}{dt}(t)$; $u(t)=Ri_R(t)$; $u(t)=L\dfrac{di_L}{dt}(t)$

On exploite alors la loi des nœuds pour obtenir : $\dfrac{d^2u}{dt^2}+\dfrac{1}{RC}\dfrac{du}{dt}+\dfrac{1}{LC}u=0$

Soit l'ED $\boxed{\dfrac{d^2u}{dt^2}+\dfrac{\omega_O}{Q}\dfrac{du}{dt}+\omega_O^2u=0}$ par identification $\dfrac{\omega_O}{Q}=\dfrac{1}{RC}$ et $\omega_O^2=\dfrac{1}{LC}$ d'où $\boxed{\omega_O=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ $\boxed{Q=R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$

3. Pour observer un régime critique, il faut que le facteur de qualité soit égal à ½ ce qui donne une expression de la résistance correspondante $\boxed{R_C=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

4. Dans le cas du régime critique, pour un facteur de qualité de ½, on obtient une racine double pour le polynôme caractéristique $r^2+2\omega_O r+\omega_O^2=0$ soit $r_d=-\omega_O$ ce qui donne la solution générale de l'équation étudiée dont on observe qu'elle est homogène sous la forme : $S_H(t)=(At+B)\exp(-\omega_O t)$

Les conditions initiales donnent alors pour la tension $u(t=0)=S_H(t=0)=B=U_O$

$$\frac{dS_H}{dt}(t)=A\exp(-\omega_O t)+(At+B)(-\omega_O)\exp(-\omega_O t)$$

d'où $\dfrac{dS_H}{dt}(t=0)=A-\omega_O B=\dfrac{1}{C}i_C(t=0)=-\dfrac{U_O}{RC}=-2\omega_O U_O$

On obtient donc $B=U_O$ et $A=-\omega_O U_O$ et finalement $\boxed{u(t)=U_O(1-\omega_O t)\exp(-\omega_O t)}$

Problème 1 : Découverte de Proxima du Centaure

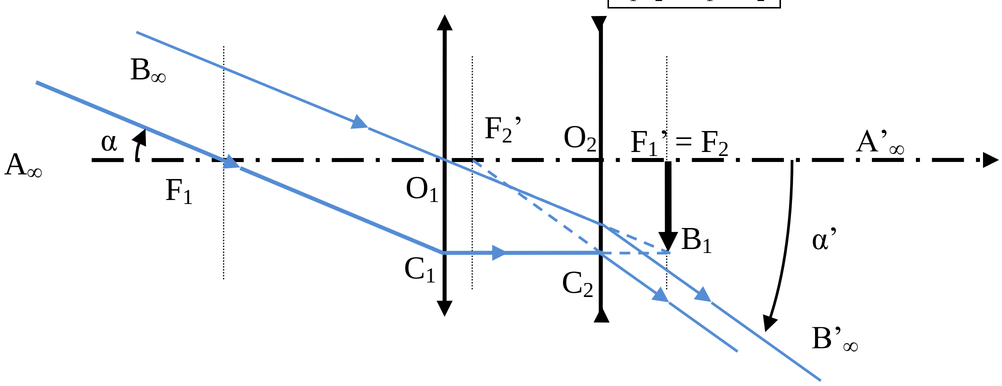
A. Première observation de l'étoile.

1. La distance D_E fournie est de $4{,}0.10^{16}$m. La vitesse de la lumière est $c=3{,}0.10^8$m.s^{-1} et une année correspond à (365*24*3600)=$3{,}1.10^7$s. Une année lumière correspond donc à $9{,}5.10^{15}$m. La conversion de la distance D_E en année lumière est donc bien d'environ 4,2 années-lumière.
2. La lunette de Galilée, destinée à l'observation à l'œil nue doit renvoyer une image à l'infini pour que cette dernière soit vue sans accommoder (par un œil emmétrope).

On peut fournir le schéma des conjugaisons : $A_\infty \xleftrightarrow{L_1} F_1'=A_1=F_2 \xleftrightarrow{L_2} A'_\infty$

La lunette observe un objet à l'infini qui est conjuguée à une image intermédiaire dans le plan focal objet de L_1.
La lunette produit une image finale à l'infini conjuguée à une image intermédiaire dans le plan focal image de L_2.
On en déduit que F_1' et F_2 sont confondus et que la distance algébrique O_1O_2 est égale à $\boxed{\overline{O_1O_2}=f_1'+f_2'}$.

3. La figure demandée est donnée ci contre.

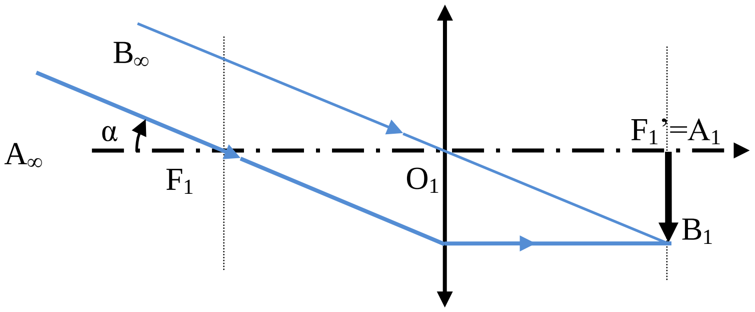


4. Dans le triangle $F_1O_1C_1$ $\tan\alpha = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{f_1'} < 0$ et dans le triangle $F_2'O_2C_2$ $\tan\alpha' = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{-f_2'} < 0$

On se place dans les conditions de Gauss, pour lesquelles $\tan\alpha \approx \alpha$ et $\tan\alpha' \approx \alpha'$ et on obtient pour le grossissement l'expression suivante $\boxed{G = \dfrac{\alpha'}{\alpha} = -\dfrac{f_1'}{f_2'}}$ A.N $\boxed{G = 400}$ C'est un grossissement fort, adapté à l'observation d'étoiles, et positif ce qui permet d'avoir une image droite de la voute céleste.

5. L'objet est à l'infini, l'image de l'étoile par la lentille L_1 est située dans le plan focal image de L_1.

Le schéma des conjugaisons est le suivant $A_\infty \xleftrightarrow{L_1} F_1' = A_1$



6. L'angle sous lequel on voit l'étoile est (dans les conditions de Gauss clairement respectées ici).

$\alpha \approx \tan\alpha = -\dfrac{2R_E}{D_E} = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{f_1'}$ on en déduit que $\boxed{\overline{A_1B_1} = -f_1'\dfrac{2R_E}{D_E}}$ ou $\boxed{A_1B_1 = f_1'\dfrac{2R_E}{D_E}}$.

7. A_1 étant l'objet pour la lentille L_2.

la relation de grandissement avec origine au foyer objet donne $\gamma_2 = \dfrac{f_2'}{\overline{F_2A_1}}$ d'où $\overline{F_2A_1} = \dfrac{f_2'}{\gamma_2}$

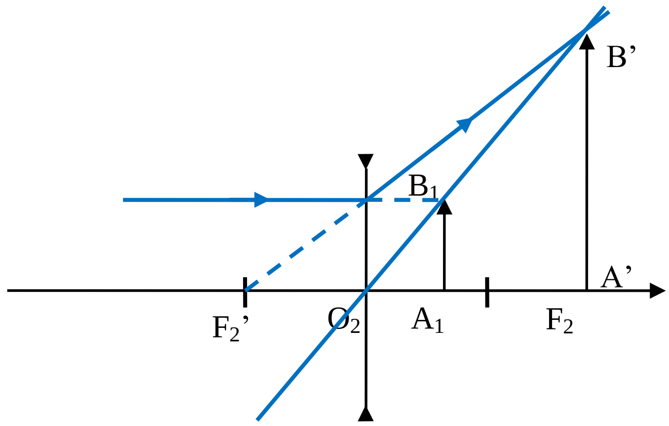
La relation de Chasles donne alors $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2F_2} + \overline{F_2A_1} = -f_2' + \dfrac{f_2'}{\gamma_2}$ d'où $\boxed{\overline{O_2A_1} = -f_2'\left(\dfrac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2}\right)}$.

On constate que cette distance est positive, l'objet est donc virtuel, situé entre le centre optique et le foyer objet de la lentille divergente.

8. La taille finale est $\overline{A'B'} = \gamma_2\overline{A_1B_1}$ soit $\boxed{\overline{A'B'} = -\gamma_2\dfrac{2f_1'R_E}{D_E}}$ ou $\boxed{A'B' = \gamma_2\dfrac{2f_1'R_E}{D_E}}$

A.N : $\boxed{A'B' = 1{,}6.10^{-7}\,m}$… C'est vraiment tout petit.

9. La figure demandée est la suivante.



10. On constate que la taille d'un cristal photosensible de chlorure d'argent est (largement) plus grande que la taille de l'image de l'étoile sur la plaque. On en déduit **<u>qu'on voit une image ponctuelle de l'étoile sur la plaque photo</u>**.

11. L'aire totale est $S = L.l$ l'aire d'un pixel est donc $s = \dfrac{S}{N} = \dfrac{L.l}{N}$ ce qui donne pour des pixels carré une taille $a = \sqrt{s} = \sqrt{\dfrac{L.l}{N}}$. L'application numérique donne $a = 3.10^6\,\mu m$. Les pixels de la CCD sont toujours de taille (largement) supérieure à l'image. **<u>L'étoile est vue comme ponctuelle le capteur photosensible</u>**.

12. La dispersion angulaire due à la diffraction derrière la lentille L_1 est caractérisée par une ouverture angulaire $\theta_{diff} \approx \sin\theta_{diff} \approx \frac{\lambda_{obs}}{D_1}$. Chaque point observé est alors étalé sur une tache de diffraction de taille $T_1 = f_1'\theta_{diff}$ donnant une tache de taille finale $\boxed{T' = \gamma_2 T_1 = \gamma_2 \frac{f_1'\lambda_{obs}}{D_1} = 3{,}8.10^{-5}m}$.

La conclusion finale est l'observation d'une figure de diffraction de taille typique 40µm sur la plaque photo ou sur le capteur photosensible. Les prévisions de l'optique géométrique sont donc largement remises en cause par le phénomène de diffraction.
L'observation de l'étoile ne sera cependant pas vraiment impactée sauf si une autre étoile proche donne une tache de diffraction se superposant à celle de Proxima Centauri.

B. Mesure de la distance entre la Terre et l'étoile

13. D'après le schéma, on peut proposer le calcul suivant : $\frac{P_E}{2} \approx \tan\left(\frac{P_E}{2}\right) = \frac{D_{TS}}{D_E}$.

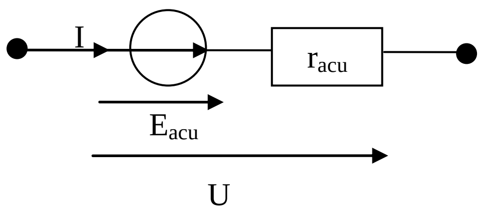
On en déduit $\boxed{D_E = \frac{2D_{TS}}{P_E}}$ Où P_E est $7{,}5.10^{-6}$rad alors $\boxed{D_E = 4{,}0.10^{13}km}$ valeur identique à celle donnée.

Problème 2 : stockage d'énergie électrique.

A. Batterie d'accumulateurs.

1. On observe que la caractéristique est une droite de pente négative (-a) passant par le point de coordonnées ($u=E_{acu}$, $i=0$)

On l'identifie comme celle **d'un générateur de Thévenin de force électromotrice E_{acu} et de résistance interne r_{acu}**$=1/a$.
Le schéma équivalent est ci-contre. et la caractéristique associée est $\boxed{U = E_{acu} - r_{acu}I}$

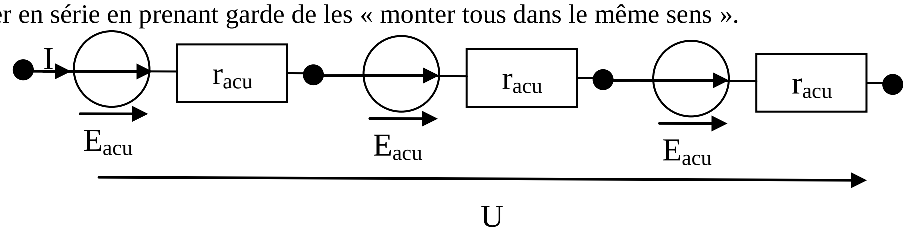


2. On observe que le point d'intersection entre l'axe des abscisses et la droite caractéristique se fait en $\boxed{(U)_{i=0} = E_{acu} = 2{,}0V}$

La droite passe par les points (U=1,85V, I=3A) et (U=2,15V, I=-3A) ce qui donne une pente $-a = -20A/V$ et une résistance interne $\boxed{r_{acu} = \frac{1}{a} = 5.10^{-2}\Omega}$.

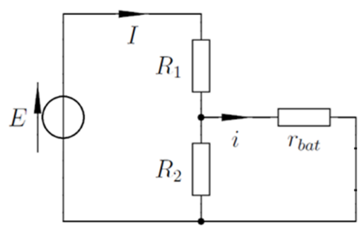
3. Pour obtenir une tension maximale à vide, il faut que les fem des accumulateurs s'additionnent, on doit alors les disposer en série en prenant garde de les « monter tous dans le même sens ».

4. Illustration pour n=3



On obtient par l'association en série des différents éléments $\boxed{E_{bat} = n_{acu}E_{acu} = 12V}$ et $\boxed{r_{bat} = n_{acu}r_{acu} = 3{,}0.10^{-1}\Omega}$

5. Lorsque la batterie est totalement déchargée et que e_{bat} est nulle, la batterie est équivalente à un simple résistor de résistance r_{bat}.
6. Le circuit redessiné est donné ci-contre.



Pour la résistance équivalente :

On associe d'abord R_2 et r_{bat} en parallèle $\frac{1}{R_{//}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r_{bat}}$

Puis on l'associe à R_1 en série $R_{eq} = R_1 + R_{//}$

On obtient finalement $\boxed{R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 r_{bat}}{R_2 + r_{bat}}}$

7. On en déduit que l'intensité débitée par la source de tension est $\boxed{I = \frac{E}{R_{eq}} = E\frac{R_2 + r_{bat}}{R_1R_2 + R_1r_{bat} + R_2r_{bat}}}$

Par un diviseur de courant, on obtient alors : $\boxed{i_O = \frac{R_2}{R_2 + r_{bat}} I = E \frac{R_2}{R_1R_2 + R_1r_{bat} + R_2r_{bat}}}$ A.N $\boxed{i_O = 6,6A}$

8. On écrit une loi des mailles $E = U_{R_1} + U_{R_2}$

Et une loi des nœuds $I = i_{R_2} + i$ On obtient le système $\boxed{\begin{cases} E = R_1 I + e_{bat} + r_{bat} i \\ I = \frac{e_{bat}}{R_2} + i\left(1 + \frac{r_{bat}}{R_2}\right) \end{cases}}$

avec $U_{R_1} = R_1 I$; $U_{R_2} = R_2 i_{R_2} = e_{bat} + r_{bat} i$

En remplaçant I dans la première équation par l'expression obtenue dans la second équation, on obtient :

$$E = R_1\left(\frac{e_{bat}}{R_2} + i\left(1 + \frac{r_{bat}}{R_2}\right)\right) + e_{bat} + r_{bat} i \text{ soit } R_2 E - (R_1 + R_2) e_{bat} = (R_1R_2 + R_1 r_{bat} + R_2 r_{bat}) i$$

Ce qui donne bien $\boxed{i = \frac{R_2 E - (R_1 + R_2) e_{bat}}{r_{bat} R_1 + r_{bat} R_2 + R_1 R_2}}$

9. On étudie $i = 0 = \frac{R_2 E - (R_1 + R_2) e_{bat}}{r_{bat} R_1 + r_{bat} R_2 + R_1 R_2}$ correspondant à $\boxed{(e_{bat})_{i=0} = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}}$ $\boxed{(e_{bat})_{i=0} = 11,4V}$

En se reportant à la première courbe donnée en début d'énoncé, cette fem de la batterie correspond à une fem par accumulateur de 1,90V et un pourcentage de charge de 10%.

10. Lorsque la batterie est chargée à 100%, la fem d'un accumulateur est de E_{acu}=2,5V, et la fem de la batterie est de e_{bat}=15V. Il faut alors que $\boxed{R_2 = R_1 \frac{(e_{bat})_{i=0}}{E - (e_{bat})_{i=0}} = 30\Omega}$

B. Utilisation d'un condensateur

11. Puisque le condensateur est considéré déchargé, la tension à ses bornes est nulle.

$\boxed{q(t<0) = 0}$ correspondant à $\boxed{u_C(t<0) = \frac{q(t<0)}{C} = 0}$

12. La tension aux bornes d'un condensateur est une grandeur continue (au cours du temps).

On en déduit que $\boxed{u_C(t = 0^+) = u_C(t = 0^-) = 0}$.

13. On écrit la loi des mailles $E = u_R + u_C$, la loi d'Ohm $u_R = Ri$, et l'équation caractéristique $i = C\frac{du_C}{dt}$

On obtient alors l'équation différentielle $E = RC\frac{du_C}{dt} + u_C$

On la met sous forme canonique : $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC}$ par identification $\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{E}{\tau}}$ où $\boxed{\tau = RC}$

14. La solution générale de cette équation est de la forme : $S_G = S_P + S_H$

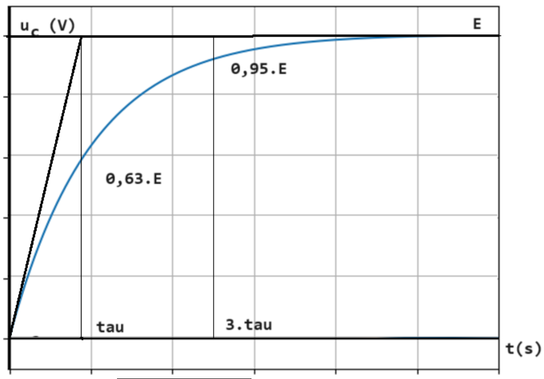
Où la solution particulière est une constante établie facilement à $S_P = E$; la solution générale de l'équation homogène est $S_H = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ Ce qui donne $S_G = E + A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

On applique alors la condition initiale

$u_C(t = 0^+) = 0 = E + A$

On obtient finalement

$\boxed{u_C(t) = E\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]}$

15. 

16. On cherche t_1 tel que $u_C(t_1) = 0,99.E$ ce qui donne $\boxed{t_1 = \tau \ln 100}$.

17. L'énergie stockée dans le condensateur dans l'état final est $\boxed{E_C(\infty) = \frac{C}{2} E^2}$.

18. On obtient le bilan de puissance par la loi des mailles en multipliant tous les termes par l'intensité dans la seule maille du circuit et en faisant l'interprétation suivante $\begin{array}{l} E.i = u_R.i + u_C.i \\ P_G = P_{Joule} + P_{Stock} \end{array}$

Où P_G est la puissance fournie par le générateur, P_{Joule} la puissance dissipée par effet Joule dans le résistor t P_{Stock} la puissance permettant de stocker de l'énergie dans le condensateur.

19. On intègre la relation précédente entre l'état initial (t=0) et l'état final (t→+∞).

$\int_{t=0}^{+\infty} P_G dt = \int_{t=0}^{+\infty} P_{Joule} dt + \int_{t=0}^{+\infty} P_{Stock} dt$ ce qui donne $\int_{t=0}^{+\infty} Ei(t)dt = E_{Joule} + \int_{t=0}^{+\infty} u_C(t)i(t)dt$

L'expression de i(t) en fonction de u_C(t) permet de réécrire

$\int_{t=0}^{+\infty} CE\frac{du_C}{dt}dt = E_{Joule} + \int_{t=0}^{+\infty} Cu_C\frac{du_C}{dt}dt$ et par changement de variable évident $\int_0^E CEdu_C = E_{Joule} + \frac{C}{2}\int_0^{E^2} d\left(u_C^2\right)$

Et on obtient : $\boxed{E_{Joule} = \frac{C}{2}E^2}$ qui correspond à l'énergie stockée dans le condensateur.

20. Par le même raisonnement qu'à la question 11. et 12. $\boxed{u_C\left(t = 0^+\right) = 0}$

21. On écrit la loi des mailles $E = u_R + u_C$ et la loi des nœuds $i = i_{R_f} + i_C$

On écrit les relations constitutives $u_R = Ri$; $u_C = R_f i_{R_f}$ et $i_C = C\frac{du_C}{dt}$

On obtient : $E = R\left(i_{R_f} + i_C\right) + u_C = \left(\frac{R}{R_f} + 1\right)u_C + RC\frac{du_C}{dt}$ soit $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{C}\left(\frac{R + R_f}{R_f R}\right)u_C = \frac{E}{RC}$

Ce qui donne sous forme canonique : $\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau'}u_C = \frac{R_f}{R_f + R}\frac{E}{\tau}}$ avec $\boxed{\tau' = \frac{R_f R}{R + R_f}C}$

22. Par la même méthode qu' à la question 14. $S_G' = \frac{R_f}{R_f + R}E + A\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$

la condition initiale donne alors $\boxed{u_C(t) = \frac{R_f}{R_f + R}E\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)\right]}$

23. La charge obtenue est : $\boxed{E_C\left(\infty\right) = \frac{C}{2}\left(\frac{R_f}{R_{f+R}}E\right)^2}$.

24. La puissance dissipée par effet Joule **lorsque sa charge est terminée** est alors $P_{Joule} = R_f i_{R_f}^2\left(\infty\right)$

En étudiant le circuit en régime stationnaire avec le condensateur chargé, on obtient $i_{R_f}\left(\infty\right) = i\left(\infty\right) = \frac{E}{R + R_f}$

On obtient donc $\boxed{P_{Joule} = \frac{R_f}{\left(R + R_f\right)^2}E^2}$ A.N $\boxed{P_{Joule} = 1,4.10^{-5}W}$ cette puissance est très faible.