

Physique.

Problème 1 : Filtrage d'un signal expérimental.

1. Pour conserver la composante de pulsation Ω , dans un signal contenant des composantes de pulsation 0 (continu), Ω et 2Ω , il faut utiliser un filtre passe bande en faisant en sorte que seule la composante de pulsation Ω soit dans la bande passante.

2. Par définition de la fonction de transfert, en notation complexe : $\underline{V}_s(t) = \underline{H}(j\omega)\underline{V}_e(t)$

Lorsqu'on repasse en notation réelle, on obtient : $V_s(t) = G(\omega)A_e \cos(\omega t + \varphi)$

3. Qualitativement, à BF, les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts, il n'y a alors aucune connexion entre l'entrée et la sortie ($(V_s=V_-)_{i=0}=V_+=0$). Le filtre coupe les BF.

Qualitativement, à HF, les condensateurs sont équivalents à des fils, la sortie est alors reliée par un fil à la borne (-), et la borne (+) est connectée à la masse. Le filtre coupe les HF.

On en conclut que le circuit réalise bien le Passe-Bande voulu.

4. Dans le modèle de l'ALI idéal, la résistance d'entrée de l'ALI est infinie, en conséquence de quoi les courants entrants par les bornes d'entrée (-) et (+) sont nuls. Dans ce modèle, on considère également que la résistance de sortie de l'ALI est nulle.

On peut alors écrire la loi des nœuds en terme de potentiel en (-) : $(\underline{V}_A - \underline{V}_-)jC\omega + \frac{(\underline{V}_s - \underline{V}_-)}{kR} = 0$

5. On écrit aussi la loi des nœuds en terme de potentiel en A :

$$(\underline{V}_- - \underline{V}_A)jC\omega + (\underline{V}_s - \underline{V}_A)jC\omega + \frac{(\underline{V}_e - \underline{V}_A)}{R} + \frac{(0 - \underline{V}_A)}{R} = 0$$

6. On observe une boucle de rétroaction sur l'entrée (-) on peut donc faire l'hypothèse d'un fonctionnement linéaire. On en conclut que : $\underline{V}_- = \underline{V}_+ = 0$

7. On traduit les deux lois des nœuds en terme de potentiel pour obtenir deux expressions de \underline{V}_A :

$$\underline{V}_A = -\frac{\underline{V}_s}{jkRC\omega} = \frac{1}{2} \frac{\underline{V}_s jRC\omega + \underline{V}_e}{jRC\omega + 1} \text{ d'où } \underline{V}_s \left(\frac{j2RC\omega + 2}{jkRC\omega} + jRC\omega \right) = -\underline{V}_e$$

D'où $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_e}{\underline{V}_s} = \frac{-\frac{k}{2}}{1 + j\left(\frac{RCk}{2}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$ de la forme $\underline{H}(jx) = \frac{H_o}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_o}$

Par identification : $H_o = -\frac{k}{2}$; $\frac{Q}{\omega_o} = \frac{RCk}{2}$; $Q\omega_o = \frac{1}{RC}$; soit $Q = \sqrt{\frac{k}{2}}$; $\omega_o = \frac{1}{RC} \sqrt{\frac{2}{k}}$

8. Par définition, le gain en décibel G_{dB} s'exprime : $G_{dB}(x) = 20 \cdot \log(G(x))$

Dans le cas étudié, il s'exprime : $G_{dB}(x) = 20 \cdot \log|H_o| - 10 \cdot \log\left(1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right)$

Le déphasage φ s'exprime : $\varphi = \pi - \arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$

9.

Sur le domaine BF :

$$G_{dB}(x) \rightarrow 20 \log|H_o| - 20 \cdot \log(Q) + 20 \log x$$

$$\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$$

Sur le domaine HF :

$$G_{dB}(x) \rightarrow 20 \log|H_o| - 20 \cdot \log(Q) - 20 \log x$$

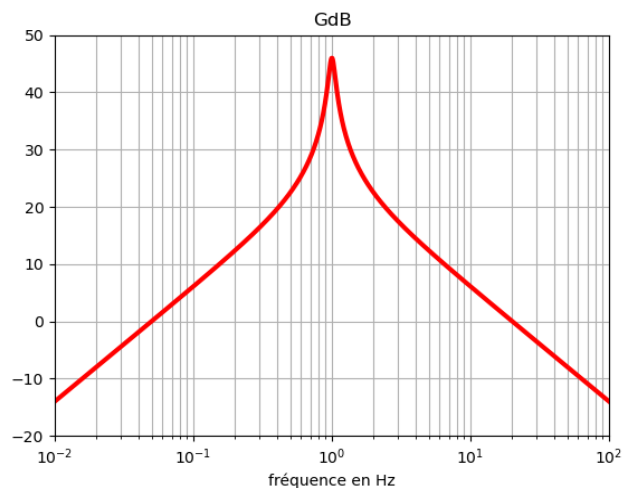
$$\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Pour le cas $x=1$:

$$G_{dB}(1) = 20 \log|H_o|$$

$$\varphi = \pi$$

10. Le diagramme est donné ci contre.



11. La bande passante à -3dB est le domaine de pulsation réduite sur lequel le gain en décibel reste supérieur au gain maximal -3dB correspondant à un gain : $G(x) > \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$

En remplaçant dans les expressions, on arrive à $Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 < 1$

On cherche donc les racines positives des deux polynômes : $\left(x^2 - \frac{1}{Q}x - 1\right)$ et $\left(x^2 + \frac{1}{Q}x - 1\right)$

On obtient alors : $x_2' = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}\right)$ et $x_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}\right)$

La bande passante est alors donnée par $[x_2', x_2]$ de largeur : $\Delta x = x_2 - x_2' = \frac{1}{Q}$ on en déduit $\Delta \omega = \frac{\omega_0}{Q}$

12. Le signal d'entrée est la somme de 3 termes. Le système étant linéaire, on peut appliquer le théorème de superposition et affirmer que le signal de sortie sera composé de la somme des réponses du filtre lorsqu'on place en entrée chacun des termes individuellement.

13. On souhaite que le filtre sélectionne au mieux la composante d'intérêt et pour cela on centre la bande passante sur la pulsation de cette composante. Il faut alors que ω_0 s'identifie à Ω : $\omega_0 = \Omega$

14. Pour chaque composante, le gain du filtre donne le lien entre les amplitudes en entrée et en sortie : $A_S(\omega) = G(\omega)A_e(\omega)$

On obtient donc : $A_0 = 0$; $A_\Omega = \alpha |H_0| V_0$; $A_{2\Omega} = \frac{|H_0| V_0}{\sqrt{1 + 2,25.Q^2}}$ A.N : $\frac{A_0}{A_\Omega} = 0$; $\frac{A_{2\Omega}}{A_\Omega} = 0,44$

15. Au vue du rapport $\frac{A_{2\Omega}}{A_\Omega}$, on doit conclure que l'extraction n'est pas correcte avec le filtre passe bande d'ordre 2 étudié car la composante de pulsation 2Ω présente une amplitude non négligeable.

16. Il faut que $G_{dB,max}$ soit obtenu pour la composante d'intérêt, il faut donc que $\Omega_0 = \Omega$

17. Sur le graphique, on lit : $G_{dB}(0) - G_{dB,max} = -53dB$ ce qui donne : $\frac{G(0)}{G(\Omega)} = 10^{-53/20}$

De même, on lit : $G_{dB}(2\Omega) - G_{dB,max} = -42dB$ ce qui donne : $\frac{G(2\Omega)}{G(\Omega)} = 10^{-42/20}$

On obtient alors : $\frac{A_0}{A_\Omega} = 1,5 \cdot 10^{-2} = 1,5\%$ et $\frac{A_{2\Omega}}{A_\Omega} = 5,3 \cdot 10^{-2} = 5,3\%$

Avec ce nouveau filtre, on a pu réduire l'amplitude des deux composantes qui parasitent la mesure à des valeurs négligeables devant celle du signal d'intérêt. Ce filtre assure bien mieux l'extraction de la composante utile du signal d'entrée.

18. On utilise les expressions des tensions en entrée du filtre pour exprimer la tension en sortie pour obtenir : $u_e(t) = KV_0^2 (1 + \alpha \cos(\Omega t) + \cos(2\Omega t)) \cos(\Omega t)$

On a alors en utilisant les relations de trigonométrie : $\cos^2(\Omega t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\Omega t))$

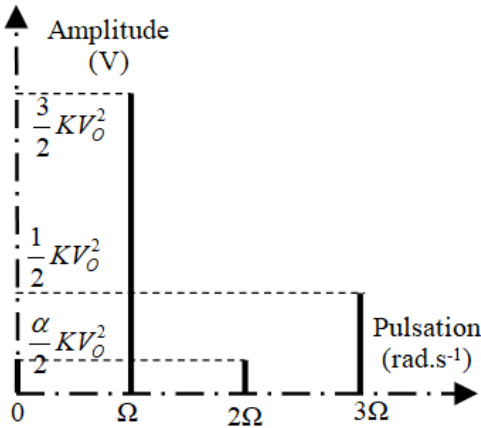
$$\cos(\Omega t) \cos(2\Omega t) = \frac{1}{2}(\cos(\Omega t) + \cos(3\Omega t))$$

On obtient : $u_e(t) = KV_0^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2} \cos(\Omega t) + \frac{\alpha}{2} \cos(2\Omega t) + \frac{1}{2} \cos(3\Omega t) \right)$

Ce signal comporte quatre composantes :

- Une de pulsation nulle et d'amplitude $\frac{\alpha}{2} KV_0^2$
- Une de pulsation 2Ω et d'amplitude $\frac{\alpha}{2} KV_0^2$
- Une de pulsation Ω et d'amplitude $\frac{3}{2} KV_0^2$
- Une de pulsation 3Ω et d'amplitude $\frac{1}{2} KV_0^2$

19. Le spectre du signal obtenu en sortie du multiplieur présente alors l'allure suivante



20. Par une analyse des comportements asymptotiques, on conclut que :

- H_1 correspond à un filtre passe-bas d'ordre 1.
- H_3 correspond à un filtre passe-bas d'ordre 2.

21. Pour le filtre passe bas d'ordre 1, on souhaite un facteur de multiplication de la composante continue $m=10$. Le comportement asymptotique de la fonction de transfert donne $H_{1,BF} = H_{0,1} = m$.

La composante continue présente une amplitude $\frac{\alpha m}{2} KV_0^2$

Avec Ω dans le domaine HF : $H_1(j\Omega) = -jm \frac{\omega_{0,1}}{\Omega}$

La composante associée présente une amplitude $\frac{3m}{2} KV_0^2 \frac{\omega_{0,1}}{\Omega}$

On souhaite donc que $\frac{3m}{2} KV_0^2 \frac{\omega_{0,1}}{\Omega} < 10^{-3} \frac{\alpha m}{2} KV_0^2$

d'où $\omega_{0,1} < \frac{\alpha}{3} \Omega 10^{-3}$

22. Pour le filtre passe bas d'ordre 2, on souhaite un facteur de multiplication de la composante continue $m=10$. Le comportement asymptotique de la fonction de transfert donne $H_{3,BF} = H_{0,2} = m$.

La composante continue présente alors une amplitude $\frac{\alpha m}{2} KV_0^2$

En supposant que Ω est située dans le domaine HF : $H_3(j\Omega) = -jm \left[\frac{\omega_{0,2}}{\Omega} \right]^2$

La composante de pulsation Ω présente alors une amplitude $\frac{3m}{2} KV_0^2 \left[\frac{\omega_{0,2}}{\Omega} \right]^2$

On souhaite donc que $\frac{3m}{2} KV_0^2 \left[\frac{\omega_{0,2}}{\Omega} \right]^2 < 10^{-3} \frac{\alpha m}{2} KV_0^2$ d'où $\omega_{0,2} < \Omega \sqrt{\frac{\alpha}{3} 10^{-3}}$

Pour le filtre d'ordre 2, on évite les comportements non désiré autour de la fréquence propre en choisissant un facteur de qualité proche de la valeur $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Problème 2 : Etude d'un circuit intégrateur.

1. On observe une boucle de rétroaction sur la borne d'entrée inverseuse, fait l'hypothèse d'un régime linéaire, d'où la relation $V_+ = V_- = 0$

On applique alors la loi des nœuds en terme de potentiel au point (-) : $\frac{V_e - 0}{R_1} + V_s j\omega = 0$

On en déduit la fonction de transfert $H_{idéal}(j\omega) = -\frac{1}{R_1 C j\omega}$

2. On traduit la fonction de transfert par l'équation différentielle $\frac{dV_s}{dt} = -\frac{1}{\tau} V_e$ avec $\tau = R_1 C$

3. La décomposition en série de Fourier s'écrit sous la forme suivante : $V_e(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cdot \cos(k\omega_F t + \varphi_k)$

Où la composante constante, égale à la moyenne du signal, est ici nulle $c_0 = 0$

Où la pulsation fondamentale est donnée par la période du signal $\omega_F = \frac{2\pi}{T}$

Et celle de l'harmonique de rang k est exprimée par $\omega_k = k\omega_F$

4. Le circuit intégrateur est linéaire, la composante constante en sortie est donc obtenue à partir de la composante constante du signal en entrée. Cette dernière étant nulle, on obtient a priori en sortie une composante constante nulle et donc une moyenne nulle.

5. Sur l'intervalle $[0 ; T/2]$, $V_e(t) = E$, on en déduit $\frac{dV_s}{dt} = -\frac{E}{\tau}$

Par intégration : $V_s(t) - V_{\max} = \int_{t=0}^t -\frac{E}{\tau} t' dt' = -\frac{E}{\tau} t$ d'où $V_s(t) = V_{\max} - \frac{E}{\tau} t$

6. La tension obtenue à l'instant $T/2$ est alors : $V_s(T/2) = V_{\min} = V_{\max} - \frac{E T}{2\tau}$

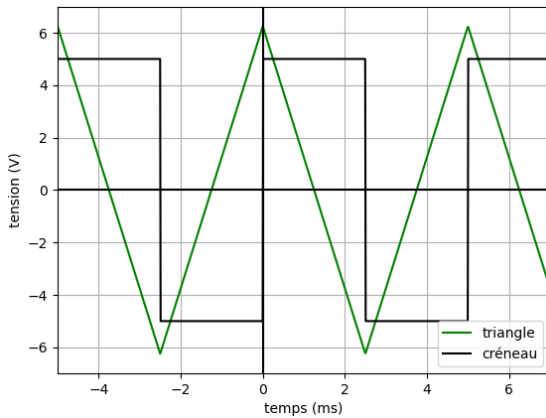
7. Sur l'intervalle $[T/2 ; T]$, $V_e(t) = -E$, on en déduit $\frac{dV_s}{dt} = \frac{E}{\tau}$

Par intégration : $V_s(t) - V_{\min} = \int_{t=T/2}^t \frac{E}{\tau} t' dt' = \frac{E}{\tau} \left(t - \frac{T}{2} \right)$ d'où $V_s(t) = V_{\min} + \frac{E}{\tau} \left(t - \frac{T}{2} \right)$

8. Puisque le signal est de moyenne nulle, on peut dire que $V_{\max} = -V_{\min}$

On obtient alors le système $\begin{cases} V_{\max} - V_{\min} = \frac{E T}{\tau} \\ V_{\max} + V_{\min} = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} V_{\max} = \frac{E T}{4\tau} \\ V_{\min} = -\frac{E T}{4\tau} \end{cases}$ A.N : $V_{\max} = 6,25V$

9. Représentation graphique :



10. On utilise à nouveau le modèle idéal en régime linéaire, ce qui donne ici $V_+ = V_- = e_D$

La loi des nœuds en terme de potentiel donne alors $\frac{0 - e_D}{R_1} + (V_s - e_D) jC\omega = 0$

On obtient alors $\frac{dV_s}{dt} = \frac{e_D}{R_1 C}$

11. En intégrant, à partir d'une tension en sortie nulle à l'instant initial, on obtient bien $V_s(t) = \frac{e_D}{\tau} t$

La tension atteint la valeur de saturation à $t_{sat} = \tau \frac{V_{sat}}{e_D}$ A.N $(t_{sat} = 3,0s)_{e_D=5mV}$ ou $(t_{sat} = 1,25min)_{e_D=0,2mV}$

Avec une durée de 3 secondes, la dérive est très rapide et le comportement linéaire du circuit est rapidement terminé. Avec une durée de 1,25 min, le défaut est moins dérangeant mais doit tout de même être contrôlé pour un bon fonctionnement en régime périodique permanent.

12. On utilise toujours le modèle idéal, on observe toujours la possibilité d'un régime linéaire, on obtient alors

$$V_+ = V_- = 0 \text{ et par loi des nœuds } \frac{V_E}{R_1} + V_s \left(jC\omega + \frac{1}{R_2} \right) = 0$$

d'où $\underline{H}(jf) = \frac{H_o}{1 + j \frac{f}{f_o}}$ Avec $H_o = -\frac{R_2}{R_1}$ et $f_o = \frac{1}{2\pi R_2 C}$

13. Sur le domaine HF, la fonction de transfert devient $\underline{H}(jf) = \frac{H_o 2\pi f_o}{j\omega}$

On aboutit bien par retour aux notations réelles à un circuit intégrateur $\frac{dV_s}{dt} = (H_o 2\pi f_o) V_e(t) = -\frac{1}{\tau} V_e(t)$

Pour que le signal créneau précédent soit bien intégré, il faut que l'ensemble de son spectre soit situé dans le domaine HF du filtre, il faut donc que sa fréquence fondamentale soit supérieure à la fréquence propre (ou fréquence de coupure, qui s'identifie puisque le circuit est d'ordre 1) du filtre.

On en déduit la condition suivante $f_F = \frac{1}{T} > 10 f_o$ (le facteur 10 peut être discuté et on peut prendre une valeur plus faible mais devant restée supérieure à 1 !).

Il faut alors que $R_2 > \frac{5T}{\pi C} = 8.10^4 \Omega$, on peut prendre alors une valeur $R_2 = 100k\Omega$

14. Sur le domaine BF, la fonction de transfert devient $\underline{H}(jf) = H_o$

Par linéarité, la composante constante en entrée donne une composante constante en sortie dont l'amplitude s'exprime

$$s_M = H_o e_M = -\frac{R_2}{R_1} e_M \text{ A.N. } (s_M = -50mV)_{e_M=5mV} \text{ ou } (s_M = -2mV)_{e_M=0,2mV}$$

Ces amplitudes de composantes constantes restent très faibles et on aura donc corrigé le comportement de l'intégrateur sans introduire une distorsion forte du signal.

Problème 3 : Etude des caractéristiques d'une bobine.

1. La réponse d'un système linéaire en régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω imposée par le signal en entrée s'écrit sous la forme : $Y(t) = Y_o \cos(\omega t + \varphi)$.

La grandeur complexe associée s'exprime alors : $\underline{Y}(t) = Y_o e^{j(\omega t + \varphi)}$ telle que $Y(t) = \text{Re}(\underline{Y}(t))$.

2. On applique la relation du diviseur de tension, valable ici car les composants sont traversés par la même intensité :

$$\underline{Y}(t) = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_{bob}} e(t)$$

On obtient alors pour lien entre les amplitudes complexes : $\underline{Y}_o = \frac{R e_o}{R+r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{\frac{R}{R+r} e_o}{1 + j \frac{1}{R+r} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$

Par identification avec la forme de l'énoncé, on obtient : $H_o = \frac{R}{R+r}$; $\frac{Q}{\omega_o} = \frac{L}{R+r}$; $Q\omega_o = \frac{1}{(R+r)C}$

On obtient donc bien la forme proposée avec $H_o = \frac{R}{R+r}$; $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q = \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

3. Le module s'exprime : $|Y_o| = \frac{H_o e_o}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$

Ce module est maximum lorsque le dénominateur est minimum, c'est-à-dire lorsque $Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ passe par sa valeur minimale évidente égale à 0 pour une valeur de x unitaire.

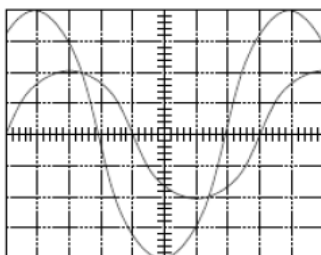
Conclusion : $|Y_o|(x)$ passe par un maximum pour x=1 et alors $Y_{\max} = \frac{R e_o}{R+r}$

4. A partir de l'expression de l'amplitude complexe, on obtient : $\arg(Y_o) = -\arg\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$

alors $\tan \varphi = -Q\left(x - \frac{1}{x}\right)$ et la partie réelle du dénominateur est toujours positive $\varphi = -\arctan Q\left(x - \frac{1}{x}\right)$

5. A la question 3, on a établi que le module de la réponse, qui donne l'amplitude du signal réel, présente une valeur maximale $Y_{\max} = \frac{R e_o}{R+r}$. On en déduit que quel que soit la valeur de pulsation $Y_o < e_o$.

Les deux voies utilisant le même calibre, on visualise alors directement sur l'écran que X(t)=e(t) est associée à la courbe présentant une amplitude de 4 carreaux et que Y(t) est associée à la courbe présentant une amplitude de 2 carreaux.



La période couvre une longueur de 8 carreaux pour un calibre de 0,1ms/div d'où : $T_{mes} = 8,0.10^{-4} s$ On en

déduit : $\omega_{mes} = \frac{2\pi}{T_{mes}} = 7,9.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$

6. Sur l'oscillogramme, on observe que la voie Y est en retard d'un carreau sur la voie X, et donc que la voie Y est en retard de 0,1ms sur la voie X.

La période entière correspondant à un retard de phase de 2π couvrant 8 carreaux, on en déduit que : $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

On en déduit que $\tan \varphi = -Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = -1$ d'où $Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = 1$ et finalement $|\underline{Y}_O|(\omega_{mes}) = \frac{H_0 e_0}{\sqrt{2}}$

7. L'amplitude de la voie X donne e_0 soit 4 carreaux au calibre 1V/div : $e_0 = 4V$

De même, la voie Y présente une amplitude de 2 carreaux au même calibre : $|\underline{Y}_O|(\omega_{mes}) = 2V$

On sait que $|\underline{Y}_O|(\omega_{mes}) = \frac{H_0 e_0}{\sqrt{2}} = \frac{R}{R+r} \frac{e_0}{\sqrt{2}}$ d'où $r = R \left(\frac{e_0}{|\underline{Y}_O|(\omega_{mes}) \sqrt{2}} - 1 \right)$ $r = 2.1.10^1 \Omega$

8. On peut alors reprendre la relation $Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = 1$ pour obtenir $R + r = L\omega_{mes} - \frac{1}{C\omega_{mes}}$

Ce qui donne : $L = \frac{R + r + \frac{1}{C\omega_{mes}}}{\omega_{mes}}$

A.N : $L = 25mH$