Physique.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les réponses finales aux questions posées.

L'usage de calculatrices est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 1 : Filtrage d'un signal expérimental.

Les projets LIGO (aux Etats-Unis) et VIRGO (en Europe) se proposent de détecter un objet dont l'existence a été prédite théoriquement depuis 1916 par Albert Einstein lorsqu'il a construit la théorie de la relativité générale : les ondes gravitationnelles.

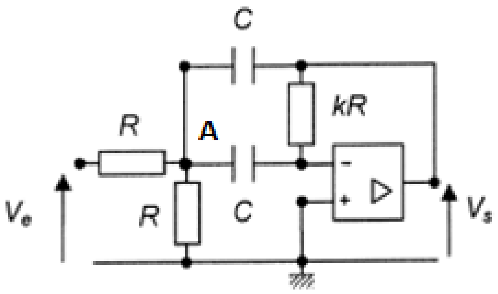
L'expérience menée produit en bout de chaine d'acquisition une tension électrique de la forme : $V_{EXP}(t) = V_O\left(1+\alpha\cos(\Omega t)+\cos(2\Omega t)\right)$ dont l'information donnant des renseignements sur les ondes gravitationnelles est contenue dans le facteur α affectant la composante de pulsation Ω et qui présente une valeur numérique de $1,5.10^{-1}$.

On souhaite extraire du signal $V_{EXP}(t)$ la composante de pulsation Ω.

1. Quel type de filtre doit être employé pour réaliser cette opération ? Justifier succinctement.

On se place en régime sinusoïdal forcé, on suppose que le signal d'entrée est de la forme : $V_e(t) = A_e\cos(\omega.t)$, on note $\underline{H}(j\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ la fonction de transfert du filtre.

2. Donner la définition de la fonction de transfert. En déduire l'expression, du signal $V_S(t)$ (en notations réelles) obtenu en sortie du filtre.



On considère le montage de la figure ci-contre :

3. Effectuer l'analyse qualitative de ce circuit pour vérifier qu'il réalise bien l'opération identifiée en q1.
4. Rappeler les hypothèses valables dans le modèle de l'ALI idéal. En déduire une relation entre $\underline{V}_-$, $\underline{V}_A$ et $\underline{V}_S$.
5. Etablir également une relation entre $\underline{V}_e$, $\underline{V}_A$ et $\underline{V}_S$.
6. Pourquoi peut-on faire l'hypothèse d'un régime de fonctionnement linéaire ? Donner alors la relation liant $\underline{V}_-$ et $\underline{V}_+$ et exploiter le circuit pour donner leur expression.
7. Montrer alors que la fonction de transfert de ce filtre s'exprime: $\underline{H}(jx) = \dfrac{H_O}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}$ où $x = \dfrac{\omega}{\omega_O}$

   avec $H_O = -\dfrac{k}{2}$; $Q = \sqrt{\dfrac{k}{2}}$; $\omega_O = \dfrac{1}{RC}\sqrt{\dfrac{2}{k}}$
8. Donner la définition du gain en décibel $G_{dB}(\omega)$ puis déterminer son expression dans le cas étudié ici. Déterminer également l'expression du déphasage $\varphi(\omega)$.
9. Déterminer les comportements asymptotiques de $G_{dB}(\omega)$ et de $\varphi(\omega)$ sur les domaines basse fréquence et haute fréquence puis étudier la valeur de ces grandeurs à la fréquence propre du filtre.
10. Pour une valeur Q=10 du facteur de qualité, représenter le diagramme de Bode asymptotique en amplitude en précisant les valeurs numériques des pentes et ordonnées associés. Représenter alors au mieux le diagramme de bode en amplitude réel.
11. Définir les pulsations de coupure à -3dB du filtre. Montrer qu'il y a deux valeurs de la pulsation réduite qui correspondent à cette définition pour le filtre étudié et en déduire l'expression de la largeur Δx puis de la largeur Δω de cette bande passante.

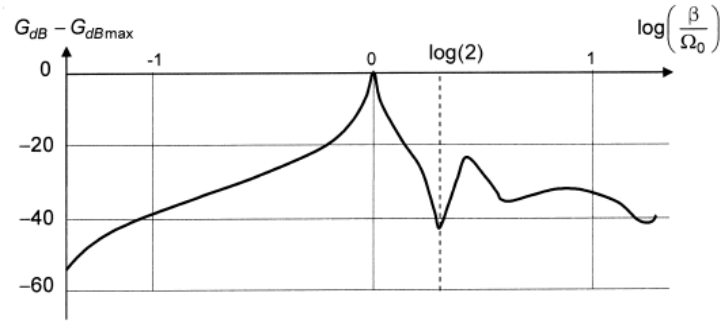
Remarque : même si on ne fait pas les calculs, on peut donner l'expression de la largeur de la bande passante en citant le cours.

Physique.

On souhaite maintenant établir le signal de sortie du filtre lorsqu'on place en entrée le signal obtenu lors de l'expérience de détection des ondes gravitationnelles.

12. Le système fonctionnant en régime linéaire, rappeler le théorème s'appliquant et donner qualitativement la forme du signal de sortie.
13. Quelle relation doit lier ω_O et Ω pour que le filtre sélectionne au mieux la composante d'intérêt du signal V_{EXP}.
14. Déterminer alors les amplitudes A_O, A_Ω et $A_{2\Omega}$ des trois composantes du signal de sortie. Exprimer et évaluer alors numériquement $\dfrac{A_O}{A_\Omega}$ et $\dfrac{A_{2\Omega}}{A_\Omega}$.
15. Ce filtre permet-il d'extraire la composante d'intérêt du signal expérimental ?

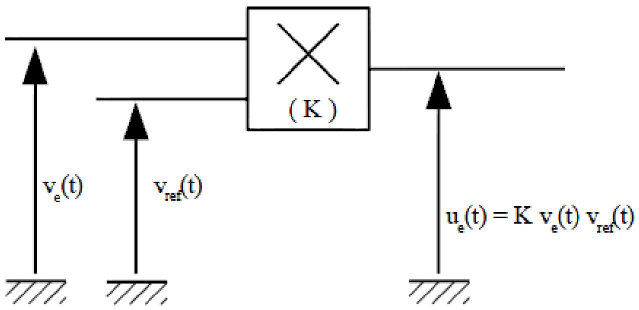
En pratique, on utilise un filtre modifié, dont le diagramme de Bode en amplitude est donné ci dessous.



16. Quelle relation doit lier Ω et Ω_O pour sélectionner la composante d'intérêt du signal V_{EXP} ?
17. Evaluer numériquement $\left(\dfrac{A_O}{A_\Omega}\right)_R$ et $\left(\dfrac{A_{2\Omega}}{A_\Omega}\right)_R$ à la sortie du filtre modifié et conclure.

On s'intéresse maintenant à un système de détection synchrone dont le but est d'extraire très efficacement le signal de faible amplitude mais de pulsation Ω bien connue au sein de son environnement bruité.

Le premier étage du système de détection synchrone est constitué d'un circuit multiplieur de constante K qui prend en entrée le signal expérimental $v_e(t)$ d'une part, et le signal délivré par une boucle à verrouillage de phase $v_{ref}(t) = V_O \cos(\Omega t)$ d'autre part. Réaliser ce signal de référence, qui doit impérativement être en phase avec le signal à analyser est techniquement compliqué mais cet aspect n'est pas traité dans ce sujet.



18. Exprimer le signal $u_e(t)$ en sortie du multiplieur sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux (dont une composante constante).
19. Tracer alors le spectre de $u_e(t)$.

Le second étage du système de détection synchrone est constitué d'un filtre passe bas. On souhaite que ce filtre transmette la composante continue d'intérêt en multipliant son amplitude par un facteur m=10 et atténue la composante sinusoïdale de pulsation Ω pour qu'elle présente une amplitude 10^3 fois plus petite que celle de la composante continue.

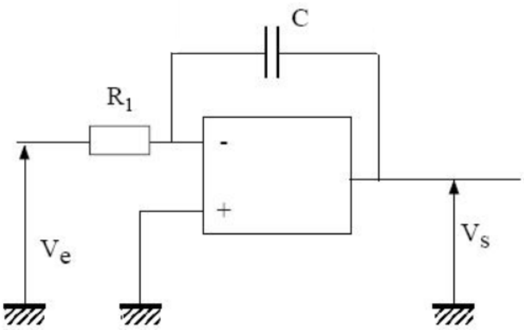
On donne les fonctions de transfert suivantes :

$$\underline{H}_1(jx) = \frac{H_O}{1+jx} \;;\; \underline{H}_2(jx) = \frac{H_O.jx}{1+jx} \;;\; \underline{H}_3(jx) = \frac{H_O}{1+j\dfrac{x}{Q}-x^2} \;;\; \underline{H}_4(jx) = \frac{H_O\left(-x^2\right)}{1+j\dfrac{x}{Q}-x^2}$$

20. Indiquer quelle**s** fonction**s** de transfert correspond**ent** au type de filtre envisagé. Indiquer alors l'ordre du filtre associé aux fonctions de transfert sélectionnées.
21. En se basant sur les équations des asymptotes basse fréquence et haute fréquence, déterminer le gain statique $H_{O,1}$ et la pulsation propre $\omega_{O,1}$ maximale du filtre dans le cas où il est d'ordre 1.
22. En se basant sur les équations des asymptotes basse fréquence et haute fréquence, déterminer le gain statique $H_{O,2}$ et la pulsation propre $\omega_{O,1}$ maximale du filtre dans les cas où il est d'ordre 2. Préciser les précautions à prendre pour la mise en œuvre du circuit d'ordre 2.

Problème 2 : Etude d'un circuit intégrateur.

Le schéma du circuit intégrateur idéal est donné ci-contre. Pour la suite du problème on considérera qu'il est réalisé avec un conducteur ohmique de résistance R_1=10,0kΩ et un condensateur de capacité C=100nF.



On se place pour commencer dans les hypothèses de l'ALI idéal.

1. Déterminer proprement la fonction de transfert $\underline{H}_{idéal}(j\omega)=\dfrac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$.
2. Traduire cette fonction de transfert en notation réelle en introduisant le temps caractéristique $\tau=R_1C$.

On place en entrée du circuit un générateur basse fréquence (GBF) produisant un signal créneau $V_e(t)$ d'amplitude E=5V de période $T=5.10^{-2}$s et de moyenne nulle. A l'instant initial, la bascule se fait de l'état bas V_e=-E à l'état haut V_e=E.

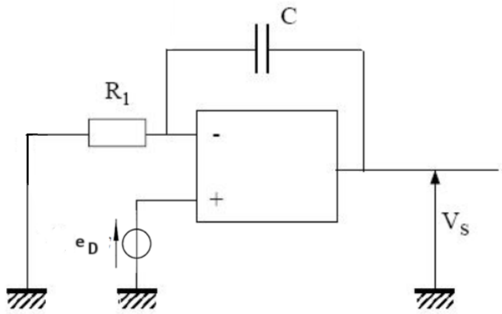
3. Ecrire la décomposition en série de Fourier du signal $V_e(t)$ en précisant l'expression de la composante constante, de la pulsation fondamentale et des pulsations des différentes harmoniques.
4. Que peut-on dire de la valeur moyenne du signal obtenu en sortie du circuit intégrateur ?

On suppose qu'à l'instant t=0, la tension en sortie est donnée par $V_S(t=0)=V_{max}$.

5. En reprenant la relation établie en question 2, et en précisant l'expression de $V_e(t)$, déterminer l'expression de $V_S(t)$ sur l'intervalle [0, T/2] en fonction de V_{max}, T et τ.
6. Préciser l'expression de la tension V_{min} obtenue en t=T/2 en fonction de V_{max}, T et τ.
7. En reprenant la relation établie en question 2, et en précisant l'expression de $V_e(t)$, déterminer l'expression de $V_S(t)$ sur l'intervalle [T/2, T] en fonction de V_{min}, T et τ.
8. Quelle seconde relation lie V_{max} et V_{min} ? En déduire les expressions de V_{max} et V_{min} en fonction de E, T et τ. Faire l'application numérique pour V_{max}.
9. Faire une représentation graphique de $V_e(t)$ et de $V_S(t)$.

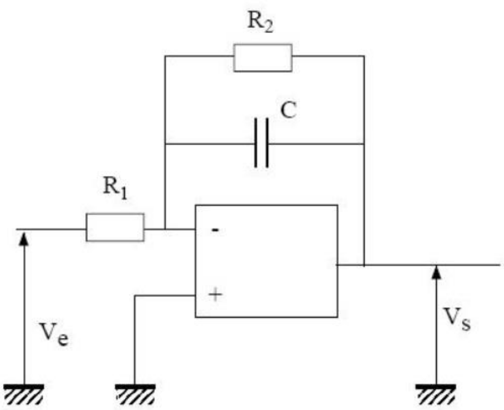
En pratique, on n'observe pas le bon signal en sortie du circuit intégrateur car l'ALI présente des défauts par rapport au modèle idéal ce qui entraine une dérive rapide du signal qui finit par présenter une valeur égale à la tension de saturation en sortie du circuit V_{sat}=15V ou $-V_{sat}$=-15V.

Le défaut principalement responsable de cette dérive est la tension de décalage en entrée qui présente une valeur constante égale à e_D. Pour mettre en évidence son rôle, on étudie la situation simplifiée suivante, où on connecte l'entrée du circuit intégrateur à la masse et où on modélise la tension de décalage par l'introduction d'une source de tension idéal de fem e_D entre la masse et l'entrée non inverseuse.



10. Etablir la relation liant $\underline{V}_S$ à e_D et la traduire en notation réelle.
11. Montrer alors que la sortie de ce circuit s'exprime $V_S(t)=\dfrac{e_D}{\tau}t$. Exprimer l'instant t_{sat} pour lequel le signal atteint la tension de saturation V_{Sat}. Faire l'application numérique pour t_{sat} avec e_D=5mV puis pour e_D=0,2mV. Commenter les résultats.

Pour éviter cette dérive du signal on transforme le circuit en lui ajoutant une résistance en parallèle du condensateur comme on le montre sur le circuit ci-contre. On reprend le modèle de l'ALI idéal (sans défaut) pour mener son étude.



12. Etablir la fonction de transfert $\underline{H}_2$(jf) de ce circuit et la mettre sous forme canonique. Préciser les expressions du gain statique H_O et de la fréquence propre f_O.
13. Montrer que le circuit est intégrateur sur le domaine haute fréquence. Indiquer alors une condition sur f_O pour que le signal créneau précédent soit intégré correctement. Proposer une valeur de R_2 permettant de répondre à ce critère.

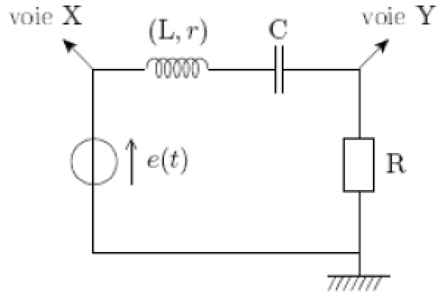
Physique.

14. Etudier le circuit à basse fréquence. Montrer alors que l'existence d'une composante constante e_M dans le signal d'entrée produit une composante constante s_M en sortie dont on donnera l'expression en fonction de e_M, R_1 et R_2. Evaluer s_M pour une valeur de e_M=5mV puis pour une valeur e_M=0,2mV. Commenter le résultat.

Problème 3 : Etude des caractéristiques d'une bobine.

On souhaite déterminer les caractéristiques **d'une bobine réelle, association en série d'une inductance L et d'une résistance r.** Pour cela, on visualise à l'oscilloscope les tensions aux bornes du générateur et du conducteur ohmique dans le circuit représenté ci-contre.

Données : R=50Ω, C=1,0µF



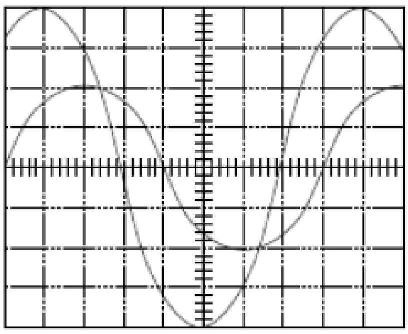
L'étude est effectuée en régime sinusoïdale forcé, le générateur fournit une f.e.m $e(t) = e_O \cos(\omega t)$.

1. Rappeler quelle sera alors la forme de la tension Y(t) en régime sinusoïdal forcé en notant Y_O son amplitude et φ son déphasage par rapport à la f.e.m. Donner alors l'expression de la grandeur complexe $\underline{Y}(t)$ associée et la relation entre Y(t) et $\underline{Y}(t)$.
2. Déterminer l'amplitude complexe $\underline{Y}_O$ et la mettre sous la forme : $\underline{Y}_O = \dfrac{H_O e_O}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$

Avec x=ω/ω_O et où on précisera les expressions de H_O, Q et ω_O en fonction de L, C, R et r.

3. Déterminer l'expression du module de l'amplitude complexe $\left|\underline{Y}_O\right|$. Montrer que ce module passe par un maximum Y_{max} pour une valeur particulière de x à déterminer et donner alors en fonction de r, R et e_O la valeur de Y_{max}.
4. Exprimer tanφ puis φ pour toute valeur de x.

On relève à l'oscilloscope les courbes suivantes :



Réglages de l'oscilloscope :

- Voie X : 1,0V/div
- Voie Y : 1,0V/div
- Base de temps : 0,10ms/div

5. En tenant compte des résultats de la question 3, attribuer les voies X et Y aux courbes leur correspondant. Déterminer alors la valeur numérique de la période T_{mes} des signaux et la valeur numérique de la pulsation ω_{mes} des signaux.
6. A partir des courbes obtenues, déterminer le retard de Y par rapport à X puis la valeur numérique de φ. En déduire que $\left|\underline{Y}_O\right|(\omega_{mes}) = \dfrac{H_O e_O}{\sqrt{2}}$
7. Déterminer les valeurs numériques de e_O et $\left|\underline{Y}_O\right|(\omega_{mes})$ à l'aide des courbes obtenues à l'oscilloscope. Déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de r.
8. Montrer alors que $L = \dfrac{R + r + \dfrac{1}{C\omega_{mes}}}{\omega_{mes}}$ et déterminer alors la valeur numérique de L.