

Problème 1 : Mesure de vitesse par effet Doppler.

1. L'onde sinusoïdale de fréquence f_{ref} , d'amplitude s_0 se propageant à la célérité c dans la direction et le

sens de l'axe (Ox) et qui aura une phase nulle en $(x,t)=(0,0)$ s'écrit :
$$s(x,t) = s_0 \cos\left(2\pi f_{ref} \left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

2. La longueur d'onde s'exprime par la relation :
$$\lambda = c.T = \frac{c}{f_{ref}}$$
 A.N : $\lambda = 8,65 \cdot 10^{-3} m$.

On est dans le domaine des ondes radio dans le sous domaine des micro-ondes.

3. On applique la loi de Chasles : $\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM}$ où $\overline{OM} = x$, $\overline{BM} = x'$ et $\overline{OB} = x_0 - v_0 t$ on obtient donc que : $x(t) = x'(t) + x_0 - v_0 t$ ou $x'(t) = x(t) - x_0 + v_0 t$.

4. Dans le référentiel de la cible, on exprime le signal en exprimant x en fonction de x' ce qui donne :

$$s(x',t) = s_0 \cos\left(2\pi f_{ref} \left(t - \frac{x' + x_0 - v_0 t}{c}\right)\right) = s_0 \cos\left(2\pi f_{ref} \left(1 + \frac{v_0}{c}\right)t - \frac{2\pi f_{ref}}{c}(x' + x_0)\right).$$

5. L'onde réfléchie se propage dans le sens rétrograde, elle s'exprime sous la forme $f(t-x'/(c+v_0))$. Avec le coefficient de réflexion r , on aboutit à la forme :
$$s_R(x',t) = r s_0 \cos\left(2\pi f_{ref} \left(1 + \frac{v_0}{c}\right)t + \frac{2\pi f_{ref}}{c}x' + \varphi\right)$$

L'onde réfléchie est en phase avec l'onde incidente sur la cible et donc à l'instant initial $t=0$, on en déduit que :

$$\varphi = -\frac{2\pi f_{ref}}{c}x_0 \text{ et finalement : } s_R(x',t) = r s_0 \cos\left(2\pi f_{ref} \left(1 + \frac{v_0}{c}\right)t + \frac{2\pi f_{ref}}{c}(x' - x_0)\right)$$

6. On reprend la relation $x'(t) = x(t) - x_0 + v_0 t$ pour aboutir à

$$s_R(x,t) = r s_0 \cos\left(2\pi f_{ref} \left(1 + \frac{v_0}{c}\right)t + \frac{2\pi f_{ref}}{c}(x - 2x_0 + v_0 t)\right) \text{ ce qui correspond bien finalement à la}$$

$$\text{forme donnée dans l'énoncé : } s_R(x,t) = r s_0 \cos\left(2\pi f_{ref} \left(1 + \frac{2v_0}{c}\right)t + \frac{2\pi f_{ref}}{c}(x - 2x_0)\right)$$

Le décalage de fréquence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie est alors :

$$\delta f = f_{ref} \left(1 + \frac{2v_0}{c}\right) - f_{ref} = \frac{2v_0}{c} f_{ref}$$

7. La vitesse v_0 s'exprime
$$v_0 = \frac{c \cdot \delta f}{2 f_{ref}}$$
 A.N : $v_0 = 2,10 \cdot 10^1 m \cdot s^{-1} = 75,6 km/h$

8. En exploitant la donnée sur la précision, on en déduit que la demi largeur de l'intervalle de mesure est égale à $\delta v = 1,6 km/h$. on en déduit que $v_0 \in [74,0; 77,2] (km/h)$.

L'incertitude type est alors évaluée en appliquant une distribution des résultats uniforme sur l'intervalle de mesure et elle s'exprime sous la forme $u(v) = \frac{\delta v}{\sqrt{3}} = 0,93 \approx 1,0$ en arrondissant à la valeur supérieure.

Finalement on a l'évaluation : $v_0 = 75,6 km/h$ avec une incertitude type $u(v) = 1,0 km/h$

9. L'évaluation numérique demandée donne :
$$\frac{\delta f}{f_{ref}} = 1,4 \cdot 10^{-7}$$
. Il est donc parfaitement exclu d'envisager une mesure directe de cette variation de fréquence.

10. On exploite l'énoncé pour obtenir :

$$u_e(t) = K v_e(t) v_{ref}(t) = K \alpha v_0^2 \cos\left(2\pi f_{ref} \left(1 + \frac{2v_0}{c}\right)t - \frac{4\pi f_{ref}}{c}x_0\right) \cos(2\pi f_{ref} t)$$

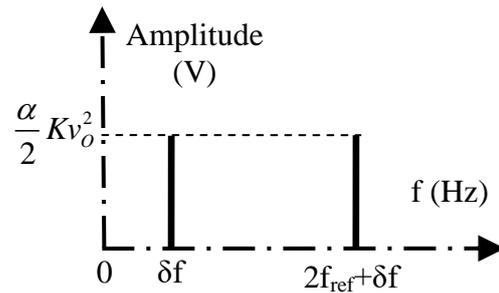
En utilisant les relations de trigonométrie, on transforme le produit de cosinus en somme de cosinus :

$$u_e(t) = K v_e(t) v_{ref}(t) = \frac{K \alpha v_0^2}{2} \cos\left(2\pi(2f_{ref} + \delta f)t - \frac{4\pi f_{ref}}{c}x_0\right) + \frac{K \alpha v_0^2}{2} \cos\left(2\pi \delta f t - \frac{4\pi f_{ref}}{c}x_0\right)$$

On obtient donc un signal à deux composantes sinusoïdales :

- Une composante d'amplitude $\frac{K\alpha v_0^2}{2}$ pour la fréquence $(2f_{ref} + \delta f)$
- Une composante d'amplitude $\frac{K\alpha v_0^2}{2}$ pour la fréquence (δf)

Le spectre correspondant à ce signal est alors donné ci-dessous.



11. On observe deux composantes sinusoïdales dans le signal dont on veut extraire la composante la plus basse, on va donc employer un filtre passe-bas.
12. On remplace le condensateur par un coupe-circuit dans le domaine BF. On observe alors que le circuit 1 et le circuit 3 coupent les BF alors que le circuit 2 transmet les BF.

On remplace le condensateur par un fil dans le domaine HF. On observe alors que le circuit 2 et le circuit 3 coupent les HF et que le circuit 1 transmet les HF.

On en conclut que :

- Le circuit 1 est un passe haut.
- Le circuit 2 est un passe bas et sera celui qui doit être employé pour réaliser l'opération de filtrage.
- Le circuit 3 est un passe bande.

13. La fonction de transfert d'un filtre, étudié en régime sinusoïdal forcé, est définie comme le rapport de la tension en sortie du filtre par la tension en entrée du filtre en notation complexe : $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s(t)}{u_e(t)}$

Pour le circuit 2, on réalise un diviseur de tension, puisqu'il est étudié comme d'habitude en boucle ouverte pour déterminer la fonction de transfert ce qui donne : $u_s(t) = \frac{Z_c}{Z_c + Z_R} u_e(t)$ ce qui aboutit à :

$$\underline{H}(jf) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \text{ soit } \underline{H}(jf) = \frac{H_o}{1 + j\frac{f}{f_o}} \text{ avec } H_o = 1 \text{ et } f_o = \frac{1}{2\pi RC}$$

14. La fréquence de coupure à -3dB est la fréquence pour laquelle, le gain en décibel prend une valeur située 3dB sous la valeur maximale prise par le gain en décibel.

$$G_{dB}(f_c) = G_{dB,max} - 3dB \text{ ce qui revient en gain à dire que } G(f_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$$

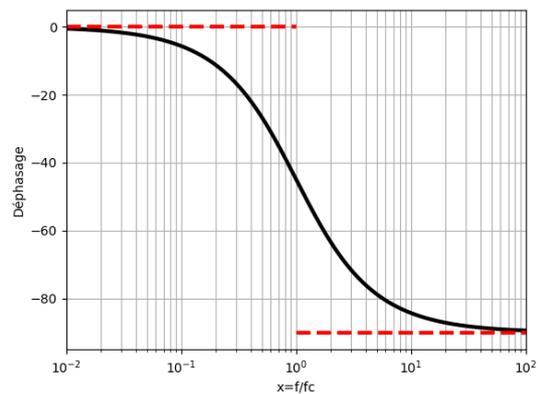
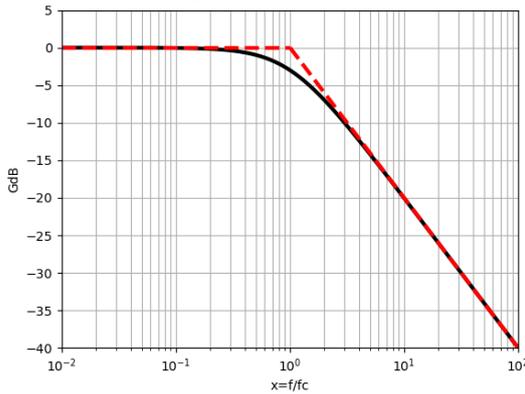
Dans le cas qui nous concerne : $G(f) = \frac{H_o}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_o}\right)^2}}$ on en déduit que $f_c = f_o$

15. Sur le domaine BF, la fonction de transfert est approximée par : $\underline{H}(jf) \rightarrow H_o = 1$
 - Le gain en décibel adopte comme comportement asymptotique : $G_{dB}(f) \rightarrow 20\log(H_o) = 0$
 - Et la phase devient : $\varphi(f) \rightarrow \arg(H_o) = 0$

Sur le domaine HF, la fonction de transfert est approximée par : $\underline{H}(jf) \rightarrow -j\frac{H_o}{f}$

- Le gain en décibel adopte le comportement : $G_{dB}(f) \rightarrow 20\log(H_o) - 20\log\left(\frac{f}{f_o}\right) = -20\log\left(\frac{f}{f_o}\right)$
- Et la phase devient : $\varphi(f) \rightarrow \arg(H_o) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

On aboutit alors au diagramme de Bode suivant :



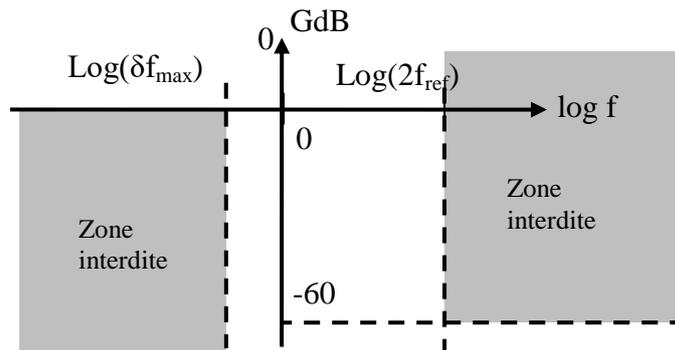
En pointillé, le diagramme asymptotique, en trait plein le diagramme réel.

16. On évalue la valeur maximale de δf avec la relation :

$$\delta f = \frac{2v_o}{c} f_{ref} = 9,6 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

on fixe donc $\delta f_{max} = 10^4 \text{ Hz}$

On établit alors le gabarit ci-contre pour le filtre :



17. On souhaite atténuer d'un facteur 10^3 l'amplitude du signal de fréquence $2f_{ref}$ (en négligeant δf devant f_{ref}). Cette composante doit être placée dans le domaine HF pour lequel $\underline{H}(jf) \rightarrow -j \frac{H_o}{f}$

et le gain est donc $G(2f_{ref}) = \frac{H_o f_o}{2f_{ref}} \leq 10^{-3}$. Puisque f_o et f_c s'identifient, on obtient donc $f_{C,max} = \frac{210^{-3}}{H_o} f_{ref}$

L'application numérique donne : $f_{C,max} \approx 7,0 \cdot 10^7 \text{ Hz}$

on observe que $\frac{\delta f_{max}}{f_{C,max}} = 1,4 \cdot 10^{-4}$, la fréquence à conserver est donc presque 4 décades en dessous de la

fréquence de coupure évaluée. La composante à conserver sera alors bien transmise sans atténuation puisqu'elle est située loin dans le domaine BF du filtre passe bas de gain statique unitaire.

18. La fréquence de coupure s'exprime : $\frac{f_{C,max}}{5} = f_o = \frac{1}{2\pi RC}$ d'où $R = \frac{5}{2\pi f_{C,max} C}$ A.N : $R = 5,2 k\Omega$

Cette valeur de résistance est raisonnable puisqu'on observe une valeur usuellement rencontrée en TP. Cette résistance donnera la résistance d'entrée du filtre et elle est suffisamment forte pour qu'on évite des problèmes d'adaptation d'impédance.

Problème 2 : Observation d'une étoile double.

Etude de l'étoile sur l'axe optique.

1. On écrit la différence de marche entre les deux voies de l'interféromètre et on décompose en fonction des points intermédiaires indiqués sur la figure :

$$\delta_{B/A}(M) = (E_1 M)_B - (E_1 M)_A = (E_1 S_B) + (S_B H) + (HM) - (E_1 S_A) - (S_A M)$$

On exploite le théorème de Malus pour se ramener à l'expression $\delta_{B/A}(M) = (S_B H)$

Entre le segment $[S_A H]$ et la droite passant par les sources $(S_A S_B)$ on retrouve l'angle θ du schéma. D'autre part, l'énoncé affirme qu'on peut assimiler l'indice optique de l'air à une valeur unitaire.

On en déduit que $\delta_{B/A}(M) = (S_B H) = S_B H = a \sin \theta$

2. On exploite le schéma pour faire le lien entre x et θ : $\tan \theta = \frac{x}{f'}$

On se place dans les conditions de Gauss, qui impliquent que les rayons lumineux sont faiblement inclinés par rapport à l'axe optique et donc que $\tan \theta \approx \theta$ et $\sin \theta \approx \theta$ et on en déduit que $\delta_{B/A}(M) = a \sin \theta \approx \frac{ax}{f'}$.

3. On travaille à longueur d'onde unique λ_0 et les deux points sources S_A et S_B sont éclairées par une même source primaire, les deux ondes sont donc synchrones (même longueur d'onde) et cohérente (même source primaire), on remplit donc les conditions pour observer des interférences.

L'intensité lumineuse est alors exprimée par : $I_1(M) = I_A + I_B + 2I_A I_B \cos(\Delta\varphi_{A/B})$

On en déduit avec les éléments de l'énoncé que : $I_1(M) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_{B/A}\right) \right]$

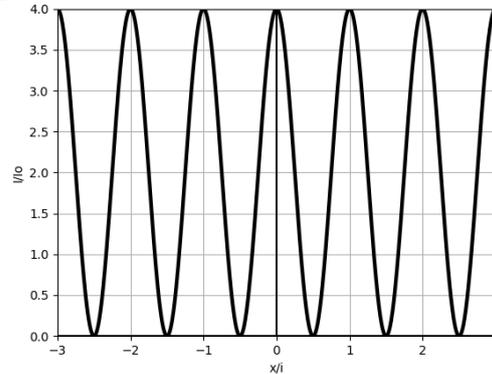
4. On observe des franges claires lorsque les interférences sont parfaitement constructives ce qui aboutit à la condition :

$$(\Delta\varphi_{A/B})_k = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_{B/A}\right)_k = 2k\pi \quad \text{on en}$$

$$\text{déduit : } x_k = k \frac{\lambda_0 f'}{a}$$

La distance entre deux franges claires est :

$$i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda_0 f'}{a} \quad \text{A.N : } i = 1,8 \text{ mm}$$



Etude du système d'étoile double.

5. On écrit la différence de marche entre les deux voies de l'interféromètre et on décompose en fonction des points intermédiaires indiqués sur la figure :

$$\delta'_{B/A}(M) = (E_2 M)_B - (E_2 M)_A = (E_2 S_B) + (S_B H) + (HM) - (E_2 H') - (H' S_A) - (S_A M)$$

En exploitant le théorème de Malus, on aboutit à la relation suivante : $\delta'_{B/A}(M) = (HM) - (H' S_A)$

On exploite alors la même configuration qu'à la question 1 pour obtenir $(HM) = a \sin \theta \approx \frac{ax}{f'}$

Sur l'autre partie, on observe une configuration analogue à la précédente d'où $(H' S_A) = a \sin \alpha$

On obtient donc bien l'expression donnée : $\delta'_{B/A}(M) = a(\sin \theta - \sin \alpha) = a\left(\frac{x}{f'} - \sin \alpha\right)$

6. On a la même question qu'en q3 et les mêmes remarques, les ondes générées par (E_2) dans les voies A et B sont synchrones (de longueur d'onde λ_0) et cohérentes, elles vont donc générer des interférences.

L'intensité lumineuse s'exprime alors : $I_2(M) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta'_{B/A}\right) \right]$

7. Sur cette nouvelle figure, les franges sombres sont associées à la condition d'interférences parfaitement destructives :

$$(\Delta\varphi'_{A/B})_k = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta'_{B/A}\right)_k = (2k+1)\pi \quad \text{d'où } x'_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0 f'}{a} + f' \sin \alpha$$

8. Les deux sources lumineuses (E_1) et (E_2) sont indépendantes, on dit aussi décorrélées, elles sont donc synchrones (même longueur d'onde λ_0) mais elles ne sont pas cohérentes. Elles ne vont donc pas générer d'interférences. L'intensité lumineuse observée est alors la somme des intensités obtenues en q3 et en q6.

9. On souhaite que x'_k vienne se superposer avec x_{k+1} ce qui donne : $x'_k = x_{k+1}$ et alors

$$\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0 f'}{a} + f' \sin \alpha = (k+1) \frac{\lambda_0 f'}{a} \quad \text{on en déduit que la condition à respecter est } \sin \alpha = \frac{\lambda_0}{2a}$$

10. L'application numérique donne : $\sin \alpha = 2,13 \cdot 10^{-7}$ d'où $\alpha = 1,13 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ " d'arc}$.

On peut comparer cette valeur à la résolution des observations à l'œil nu de 1' d'arc. La mesure réalisée ici est donc de valeur 1300 fois plus petite que l'angle distinguable à l'œil nu.

11. On obtient cette fois une interfrange $i = \frac{\lambda_0 f'}{a} = 7,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ Ces franges étaient en fait enregistrées sur des plaques photographiques analysées ensuite au microscope...

Problème 3 : mode propre de vibration d'une flute à bec.

1. L'onde générée dans le tube de la flute à bec est une onde sonore.

Les grandeurs physiques support de cette onde sont la surpression acoustique et la vitesse locale d'écoulement lors de la mise en vibration des couches d'air successives.

La pression acoustique est de l'ordre de 0,2Pa, la vitesse d'écoulement locale est de l'ordre de 10^{-3}m.s^{-1} pour une discussion normale. La célérité des ondes sonores dans l'air est de l'ordre de $c=340\text{m.s}^{-1}$.

2. Les ondes caractérisées par la présence de nœuds et de ventres de vibration sont les ondes stationnaires. L'expression proposée est bien une onde stationnaire puisqu'on y observe une séparation de la variable temporelle et de la variable spatiale dans deux fonctions sinusoïdales distinctes.

Le lien entre la longueur d'onde λ et la fréquence f est identique à celui pour les ondes progressives $\lambda = cT = \frac{c}{f}$

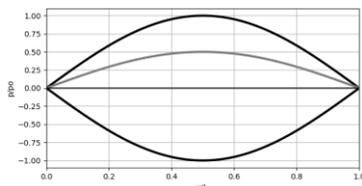
3. La condition imposée en $x=0$ par la présence d'un nœud s'écrit $p(0,t) = 0$ (quel que soit l'instant t).

L'expression proposée respecte bien cette condition puisque $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} 0\right) = 0$.

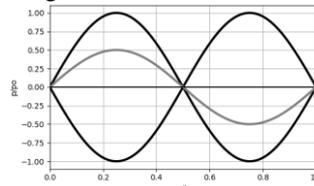
4. La présence d'un nœud en $x=L$, impose une surpression nulle en ce point $p(L,t) = 0$ qui se traduit par : $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} L\right) = 0$ ce qui amène à la construction d'une famille de longueur d'onde telle que $\left(\frac{2\pi}{\lambda_k} L\right) = k\pi$

D'où les longueurs d'onde $\lambda_k = \left(\frac{2L}{k}\right)$ et les fréquences $f_k = \frac{c}{\lambda_k}$ exprimée par $f_k = kf_1$ avec $f_1 = \frac{c}{2L}$

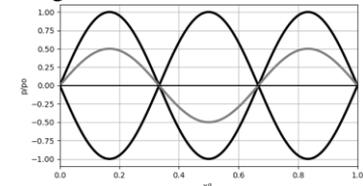
5. Pour le mode fondamentale $k=1$:



Pour le mode harmonique de rang 2 :



Pour le mode harmonique de rang 3 :



6. La longueur du tube mis en vibration est

$$L(Do) = \frac{c}{2f_1(Do)} = 6,5 \cdot 10^{-1} \text{m}$$

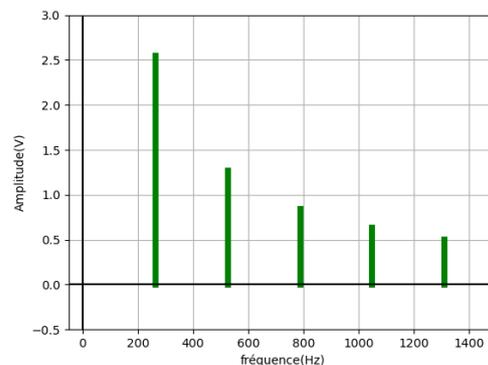
7. Si la note jouée est bien le Do(3) alors la fréquence fondamentale de l'enregistrement est $f_1(\text{Do}3) = 262\text{Hz}$.

On mesure sur l'enregistrement trois périodes $3T = 11,5\text{ms}$ ce qui donne une fréquence fondamentale $f = \frac{1}{T} = \frac{3}{11,5 \cdot 10^{-3}} = 261\text{Hz}$

Aux erreurs de mesures près, il y a bien correspondance entre cet enregistrement et la note Do(3) jouée sur l'instrument.

8. Le timbre de l'instrument est spécifique de chaque instrument, il est étudiable en observant le spectre du son joué.

Pour la flute à bec, on s'attend à un spectre présentant l'allure suivante.



9. On joue une note une octave au-dessus de la note attendue lorsqu'on multiplie par deux la fréquence fondamentale du spectre produit. Cette possibilité existe pour la flute à bec car l'harmonique de rang 2 fait partie des modes propres de vibration de la colonne d'air constituée dans cet instrument.

En soufflant trop fort, il semblerait donc qu'on déstabilise le fondamental et qu'on favorise la production d'une oscillation de la colonne d'air selon l'harmonique de rang 2 entraînant le phénomène « d'octavation ».

10. Dans la clarinette, la condition imposée en $x=0$ par la présence d'un nœud permet de reprendre

$$\text{l'expression générale } p(x,t) = p_o \cos(2\pi ft) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right).$$

En revanche, la présence d'un ventre en $x=L$, impose une surpression d'amplitude maximale en $x=L$ ce qui se traduit par $\left|\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} L'\right)\right| = 1$ Les solutions de cette équation sont du type $\frac{2\pi}{\lambda_k'} L' = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ce qui donne

$$\lambda_k' = \frac{4L'}{2k+1} \text{ et } f_k' = (2k+1)f_1' \quad [k \in \mathbb{N}] \text{ où } f_1' = \frac{c}{4L'}$$

11. Pour que la fréquence fondamentale soit un Ré(2) il faut que $L'(Re) = \frac{c}{4f_1'(Re)} = 58cm$

Pour qu'un flute à bec permette de jouer cette même note, il faudrait qu'elle présente une longueur

$L'(Re) = \frac{c}{2f_1'(Re)} = 1,16m$ soit une longueur double de celle de la clarinette.

12. On a vu que la possibilité d'octavier était liée à la présence d'une harmonique de rang 2 dans le spectre du son produit avec un flute à bec. Cette harmonique est absente dans le spectre du son produit avec une clarinette et il semble donc logique qu'une clarinette ne permette pas d'octavier.

13. On détermine le nombre n de demi-ton en exploitant : $f_1(n) = f_1(Do) \cdot 2^{n/12}$ d'où $n = 12 \frac{\ln\left(\frac{f_1(n)}{f_1(Do)}\right)}{\ln 2}$

Pour la longueur de la colonne d'air mise en vibration on sait que : $L(n) = \frac{c}{2f_1(n)}$

On exploite ces deux expressions pour tous les éléments du tableau :

k_0	1	2	3	5	6	7
note	Si(3)	La(3)	Sol(3)	Mi(3)	Re(3)	Do(3)
Fréquence (Hz)	494	440	392	330	294	262
n (nombre de $\frac{1}{2}$ tons)	11	9	7	4	2	0
Longueur de la colonne (cm)	34,4	38,6	43,4	51,5	57,8	64,9