

Partie 1 : Perseverance.

A. L'atterrissage de Perseverance.

1. Pour un modèle de point matériel, l'énergie cinétique en A s'exprime $E_C(A) = \frac{1}{2}mv_A^2$.

2. Le poids exercé sur la sonde s'exprime $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ avec (Oz) un axe vertical vers le haut.

L'énergie potentielle associée est alors $E_p = mgz$

Le travail du poids s'exprime alors par la relation $W_{AB,g} = E_p(A) - E_p(B) = mg(z_A - z_B) > 0$. Le poids est donc une force motrice vis-à-vis du mouvement de chute.

3. Au cours de la chute, les frottements avec l'atmosphère martienne vont exercer une force sur la sonde.

4. Le théorème de l'énergie cinétique s'exprime ainsi entre A et B : $E_C(B) - E_C(A) = W_{AB,g} + W_{AB,f}$

On en déduit $W_{AB,f} = m \left[\frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2) + g(z_B - z_A) \right]$ A.N : $W_{AB,f} = -2,6 \cdot 10^8 \text{ J}$ C'est un travail considérable mais qui reste inférieur à celui subi dans la première phase ! On comprend la nécessité d'installer un bouclier thermique pour protéger les instruments transportés.

5. On applique la 2LN en tenant compte des indications de l'énoncé :

- Chute purement verticale à la vitesse $-v\vec{e}_z$

- Le poids et les frottements fluides sont les seules forces agissant sur la sonde.

Ce qui donne : $\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt} = m\vec{a}_{M/R} = \vec{P} + \vec{f}$ la proj sur \vec{e}_z donne $-m \frac{dv}{dt} = -mg + hv$ d'où l'ED

$$\frac{dv}{dt} + \frac{h}{m}v = g$$

On la met sous forme canonique $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = \frac{1}{\tau}v_{\text{lim}}$ par identification $\tau = \frac{m}{h}$ et $v_{\text{lim}} = \tau g = \frac{mg}{h}$

6. La célérité des ondes em dans le vide est de l'ordre de $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

On en déduit que la longueur d'onde dans le vide de l'onde radar est $\lambda_0 = \frac{c}{f_m} = 1,0 \text{ cm}$, onde radio.

7. La durée prise par l'onde pour faire l'aller retour est $\Delta t = \frac{2H}{c}$, la sonde largue le bouclier à l'altitude

$z_B = 7,5 \text{ km}$ ce qui donne $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$.

8. Les impulsions sont émises aux instants $t_k = kT$. Lorsque la sonde émet l'impulsion numéro k elle a atteint

l'altitude $H - kvT$, elle met donc une durée $\Delta t_k = \frac{H - kvT}{c}$ pour atteindre le sol à l'instant $t_k' = t_k + \Delta t_k$ ce

qui donne $t_k' = kT + \frac{H - kvT}{c}$, on en déduit $t_{k+1}' - t_k' = T \left(1 - \frac{v}{c} \right)$ puis $T - T' = T \frac{v}{c}$

9. On déduit de l'énoncé que $\delta T = 2T \frac{v}{c}$

Par analogie entre T et la période du signal sinusoïdal on obtient $\delta f = \frac{1}{T - \delta T} - \frac{1}{T} = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{1 - \frac{\delta T}{T}} - 1 \right) \xrightarrow{DL1} \frac{\delta T}{T^2}$

Et par approximation affine $\delta f \approx \frac{2v}{c} f_m$. En B l'A.N. donne $\delta f(B) = 3,2 \cdot 10^4 \text{ Hz}$ soit $\delta f(B) = 10^{-6} \cdot f_m$ Pour mesurer ce décalage faible il faudra faire un traitement du signal par une détection synchrone et un filtre passe bas.

B. La communication.

10. En régime stationnaire avec l'interrupteur ouvert, l'intensité du courant est nulle et l'énoncé indique que le condensateur est déchargé, on en déduit : $u_C(t=0^-) = 0$ et $i(t=0^-) = 0$

La tension aux bornes d'un condensateur est continue $u_C(t=0^+) = u_C(t=0^-) = 0$

L'intensité traversant la bobine est continue $i(t=0^+) = i(t=0^-) = 0$

11. On écrit la loi des mailles $E = u_R + u_L + u_C$

On écrit les équations caractéristiques des trois dipôles $u_R = Ri$; $u_L = L \frac{di}{dt}$; $i = C \frac{du_C}{dt}$

On obtient alors l'équation $LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$ sous forme canonique $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$

Par identification $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ce qui donne $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

12. L'A.N. donne $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 8,0kHz$ cette valeur est 10^6 fois plus faible que la fréquence d'émission de l'antenne, ce qui situe la fréquence de l'expérience 6 décades en dessous de la fréquence de l'antenne.

13. L'A.N. donne $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 10$, ce qui assure que le régime transitoire observé sera de type pseudopériodique.

14. Les trois composants sont associés en série, on en déduit $Z_{eq} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$.

15. La tension complexe d'alimentation s'exprime $e(t) = E \exp(j\omega t)$ telle que $e(t) = \text{Re}(e(t))$.

16. Le circuit fonctionne en régime sinusoïdal forcé, l'intensité en régime permanent est sinusoïdale synchrone de la tension d'alimentation de la forme donnée $i(t) = I \cos(\omega t + \phi)$ et $i(t) = \underline{I} \exp(j\omega t)$ où $\underline{I} = I \exp(j\phi)$

17. On exploite la définition de l'impédance $\underline{e}(t) = Z_{eq} \underline{i}(t)$

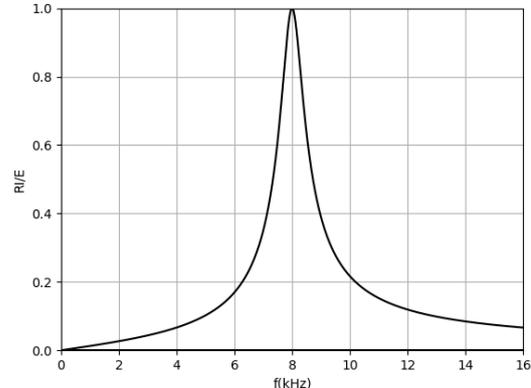
d'où $\underline{I} = \frac{E}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{E/R}{1 + j\frac{L}{R}\omega + \frac{1}{jRC\omega}}$ Qui est bien de la forme $\underline{I} = \frac{I_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

par identification $I_0 = \frac{E}{R}$; $\frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R}$; $Q\omega_0 = \frac{1}{RC}$ d'où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

18. L'amplitude de l'intensité réelle est

$$I = |\underline{I}| = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

On observe alors facilement que $I(\omega)$ est maximale quand $\omega = \omega_0$ et on montre (après un long calcul non demandé, ouf) que la courbe de réponse présente une largeur à $1/\sqrt{2}$ égale à $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.



19. Pour l'ALI idéal, la résistance d'entrée est infinie, les courants entrants sont nuls $i_+ = 0$; $i_- = 0$.

On en déduit que l'intensité i traverse la résistance « en haut » ce qui amène à la relation $V_+ - V_S = R_1 i$

Et on en déduit qu'on peut appliquer un diviseur de tension « en bas » ce qui donne $V_- = \frac{r}{r + R_1} V_S$

20. On peut faire l'hypothèse d'un régime de fonctionnement linéaire car il y a une boucle de rétroaction sur l'entrée inverseuse. On en déduit $V_- = V_+$ ce qui donne $V_+ = V_S + R_1 i = \left(1 + \frac{R_1}{r}\right) V_+ + R_1 i$.

On en déduit $U = V_+ = -r i$ ce qui donne bien la relation $U = V_+ = R_{eq} i$ avec $R_{eq} = -r$

Le circuit se comporte donc comme un conducteur ohmique de résistance négative ce qui justifie le nom donné.

21. L'impédance équivalente à l'association des quatre dipôles est $Z_{eq} = R + R_{eq} + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$

Par la loi des mailles, on obtient alors $0 = Z_{eq} \underline{i}$ ce qui donne $\frac{(R + R_{eq})}{L} (j\omega) \underline{i} + (j\omega)^2 \underline{i} + \frac{1}{LC} \underline{i} = 0$

Par retour aux notations réelles, en traduisant les multiplications de l'intensité complexe par $(j\omega)$ en dérivée de l'intensité réelle par rapport aux temps $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R + R_{eq}}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$

22. Pour que l'équation obtenue s'identifie à l'OH, il faut que $\frac{R+R_{eq}}{L}$ soit nul soit $R_{eq} = -R$ soit $r = R$
23. L'équation différentielle devient alors $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{LC}i = 0$ de la forme $\frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2i = 0$ de même pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ que celle du circuit RLC initial. Les solutions de cette équation sont des fonctions sinusoïdales de pulsation ω_0 . Le circuit va donc osciller spontanément à la fréquence propre f_0 .
24. La loi des mailles s'écrit $u_C + u_L + u_R + u_{R_{eq}} = 0$ en multipliant par l'intensité, on aboutit au bilan de puissance suivant :
- $$u_C i + u_L i + u_R i + u_{R_{eq}} i = 0$$
- $$\frac{dE_C + E_L}{dt} + P_{Joule} = P_{fournie}$$
- où E_C est l'énergie stockée dans le condensateur, E_L celle stockée dans la bobine, P_{Joule} la puissance dissipée dans le conducteur ohmique et $P_{fournie}$ la puissance amenée par le circuit à résistance négative. Lors du fonctionnement en oscillation harmonique, les énergies stockées sont périodiques et par conséquent $\left\langle \frac{dE_C + E_L}{dt} \right\rangle_T = 0$ ce qui donne $\left\langle P_{fournie} \right\rangle_T = \left\langle P_{Joule} \right\rangle_T$. Le circuit à ALI apporte la puissance nécessaire pour compenser les pertes par effet Joule. Le circuit à ALI peut fournir cette puissance car c'est un élément actif, qui peut transmettre au circuit la puissance qu'on lui apporte en l'alimentant par une alimentation (-15 ; 0 ; +15).
25. On peut estimer la durée par $\tau = \frac{d}{c} = 1000s \approx 17 \text{ min}$, il faut donc un quart d'heure pour qu'un signal parcourt cette distance, ce qui rend impossible un pilotage en direct du rover depuis la Terre et nécessite un rover parfaitement autonome pour réaliser ses différentes tâches.
26. Pour une image 4K, il faut $4096 * 2160 * 32 \text{ bits}$ d'information et il y a 8 bits dans un octet d'où le poids d'une image 4K évalué à 35 Mo
27. Pour une vidéo de une seconde, soit 24 images, le poids est de 850 Mo . Avec le débit indiqué, il faut donc une transmission sur une durée de $3400s \approx 1 \text{ heure}$. La transmission de vidéo 4K serait donc extrêmement lente et la pertinence de cet équipement en est donc fortement réduite.

Partie 2 : l'expérimentation.

A. Le spectromètre imageur SuperCam.

28. La masse molaire du dioxyde de carbone est donnée $M(CO_2) = M(C) + 2M(O) = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
29. La célérité du son dans l'atmosphère martienne est $c_{Mars} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M(CO_2)}} = 2,4 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ alors que sur Terre elle est d'environ $c_{Terre} = 3,4 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Le son est donc transmis dans l'atmosphère martienne avec une célérité 30% plus faible que celle dans l'atmosphère Terrestre.
30. La longueur d'onde donnée pour le laser $\lambda = 1,067 \mu\text{m}$ appartient au domaine des infrarouges.
31. Le laser émet de la lumière dans une seule « couleur », soit une seule fréquence, une seule longueur d'onde.
32. L'énergie libérée par une impulsion est $E_{imp} = 15 \text{ mJ}$ et présente une durée $T_{imp} = 5 \text{ ms}$ sur une surface d'aire limitée à $S = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$ on en déduit que l'irradiance obtenue est $P_{Cam} = \frac{E_{imp}}{T_{imp} S} = 2,4 \text{ GW} \cdot \text{cm}^{-2}$

La puissance seuil permettant de produire un plasma est $P_{seuil} = 1,0 \text{ GW} \cdot \text{cm}^{-2} < P_{Cam}$. La caméra pourra bien créer un plasma car son irradiance dépasse bien le seuil nécessaire.

33. On retrouve dans le spectre obtenu par irradiation de la roche calcique les raies B (394nm), D (397nm), F (423nm), J, K et L (443, 444 et 446nm) qui sont les raies indiquant la présence de l'ion Ca^+ dans le plasma ionisé produit à partir de cette roche. L'analyseur de spectre semble donc bien être calibré correctement.
34. Les conditions de Gauss sont les suivantes :

- Les rayons lumineux sont faiblement inclinés par rapport à l'axe optique du système (typiquement des angles inférieurs à 10°)
- Les rayons arrivent sur le système optique à des distances faibles devant les distances typiques de ce dernier. Par exemple inférieure à la (valeur absolue de) la distance focale de la lentille.

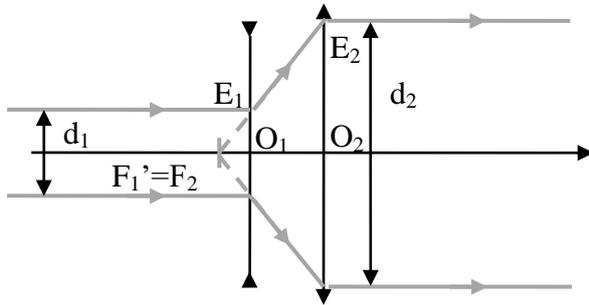
Un système optique est stigmatique (au sens approché du terme) lorsqu'un rayon incident passant par le point objet produit un rayon émergent passant par le (ou au voisinage du) point image conjugué.

Un système optique est aplanétique lorsqu'un objet dans un plan de front (plan perpendiculaire à l'axe optique), produit une image située dans un autre plan de front.

35. Un système afocal produit à partir d'un objet à l'infini une image renvoyée à l'infini, ce qui se traduit par le renvoi à l'infini du foyer objet et du foyer image.

Pour qu'un système de deux lentilles minces soit afocal, il faut que $A_{\infty} \xrightarrow{L_1} F_1' = A_{\text{int}} = F_2 \xrightarrow{L_2} A_{\infty}'$. On en déduit donc que le foyer image F_1' de la lentille L_1 se confond avec le foyer objet F_2 de la lentille L_2 .

36. Le schéma est le suivant.



Le dispositif étudié permet bien d'élargir le faisceau en plaçant d'abord la lentille divergente, puis la lentille convergente. Par retour inverse de la lumière, on obtiendrait bien un amincissement du faisceau en plaçant les lentilles dans l'autre ordre.

37. Par le théorème de Thalès appliqué dans les triangles $F_1'O_1E_1$ et $F_2O_2E_2$, on obtient :

$$\frac{O_1E_1}{F_1'O_1} = \frac{O_2E_2}{F_2O_2} \text{ d'où } d_2 = d_1 \frac{f_2'}{-f_1'} = 15\text{mm}$$

B. Ingenuity.

38. On écrit la condition d'équilibre pour Ingenuity soumis à la force F de l'hélice et à son poids :

$\vec{P} + \vec{F} = 0$ ce qui donne par projection sur (Oz) $F = mg$. La surface balayée par les pales de l'hélicoptère est $S = \pi R_p^2$

finalement la puissance à fournir s'exprime $P = \frac{1}{R_p} \sqrt{\frac{(mg)^3}{2\pi\rho}}$ A.N : $P = 100\text{W}$

39. On traduit l'énoncé pour obtenir $\Omega = 2,6 \cdot 10^2 \text{ rad.s}^{-1}$ et la vitesse en bout de pale est $v = R_p \Omega = 1,6 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$

La vitesse du son dans l'atmosphère martienne est de $2,4 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$, la vitesse de la pale n'est donc pas « supersonique » ce qui permet d'en préserver l'intégrité physique.

40. Le moment d'inertie de l'hélice bipale s'exprime et s'évalue à $J_{\text{hélice}} = 2J_{\text{pale}} = \frac{m_{\text{pale}} R_p^2}{6} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$.

Le moment cinétique d'une hélice est alors $L_{\text{hélice}} = J_{\text{hélice}} \Omega = 1,6 \text{ kg.m}^2 \text{ s}^{-1}$

41. Le moment cinétique de la seconde hélice est l'opposé de celui de la première $L'_{\text{hélice}} = -L_{\text{hélice}}$.

Si ce système de deux pales contrarotatives n'était pas mis en place, une rotation de tout Ingenuity serait nécessaire pour compenser la rotation de l'hélice et perturberait son bon fonctionnement, par exemple il perturberait les prises de vue. Dans un hélicoptère classique, le rotor de queue permet de compenser la rotation du rotor principal afin de garder l'appareil en équilibre autour de l'axe de rotation vertical.

Partie 3 : suspension de véhicule.

A. Suspension sans amortisseur.

42. Pour référentiel galiléen, on peut donner l'exemple du référentiel héliocentrique. On sait que deux référentiels galiléens sont animés d'un mouvement relatif de translation rectiligne uniforme.

43. Puisque la masse se répartie sur les quatre amortisseurs de manière équitable, **chaque amortisseur supporte une masse** $m = \frac{M}{4}$

44. Le bilan des forces sur le point matériel de masse m est :

- L'action de gravité exerçant le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$
- L'action de rappel élastique de l'amortisseur $\vec{F}_{el} = -k(l - l_0)\vec{e}_z$

La condition d'équilibre s'écrit $\vec{P} + \vec{F}_{el} = \vec{0}$ par projection sur (Oz) $-k(l_{eq} - l_0) - mg = 0$ et finalement $l_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$

45. On analyse la force élastique pour obtenir $[F_{el}] = M.L.T^{-2} = [k]L$, on en déduit que $[k] = M.T^{-2}$

D'autre part, il est évident que $[m] = M$ et on sait que $[\omega_0] = T^{-1}$

L'analyse dimensionnelle est directe et donne $[\omega_0] = [k]^{1/2} [m]^{-1/2}$ d'où la proposition $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

46. Lorsque les deux ressorts sont en parallèle ils appliquent la force élastique directement sur la masse m la force totale est donc la somme des forces pour chaque ressort.

On en déduit que la constante de raideur pour deux ressorts en parallèle est $\vec{F}_{el,tot} = \vec{F}_{el,1} + \vec{F}_{el,2} = -(k_1 + k_2)(l - l_0)\vec{e}_z = -k_p(l - l_0)\vec{e}_z$ d'où $k_p = k_1 + k_2$.

47. Pour le véhicule, la raideur équivalente aux quatre amortisseurs est donc $k_v = 4k$

48. On obtient pour le véhicule complet, une masse $M=4m$, une raideur du ressort $k_v=4k$ d'où $\Omega_o = \omega_o$

B. Suspension avec amortisseur.

49. Le bilan des forces inclut toujours le poids et la force élastique, on lui ajoute la force de frottement fluide

$$\vec{F}_t = -h\vec{v} = -h\dot{l}\vec{e}_z$$

La 2LN pour le point matériel dans le référentiel terrestre s'écrit $\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt} = m\vec{a}_{M/R} = \vec{P} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_t$

Ce qui donne par projection sur (Oz) $m\ddot{l} = -mg - k(l-l_o) - h\dot{l}$ d'où $m\ddot{l} + h\dot{l} + kl = k\left(l_o - \frac{mg}{k}\right) = kl_{eq}$

On fait le changement de variable $z = l - l_o + \frac{mg}{k}$; $\dot{z} = \dot{l}$; $\ddot{z} = \ddot{l}$ donnant $m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = 0$

On met alors cette équation sous forme canonique $\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_o^2 z = 0$

Par identification $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$; $\frac{\omega_o}{Q} = \frac{h}{m}$ et ainsi $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{1}{h} \sqrt{km}$

50. Pour que le retour du système à l'équilibre se fasse le plus rapidement possible, il faut que le régime transitoire soit de type critique et que $Q=0,5$. On en déduit $k_c = \frac{h^2}{4m}$

51. Si le véhicule est en situation de surcharge, la masse est plus élevée et donc le facteur de qualité augmente et prend une valeur supérieur à la valeur critique de 0,5. On observera alors un régime transitoire de type pseudopériodique.

On considère un véhicule qui tombe d'une marche de hauteur H. On prend pour origine temporelle l'instant de passage de la hauteur z=H à la hauteur z=0. On suppose que le régime transitoire est celui permettant le retour le plus rapide à la position d'équilibre.

52. La position et la vitesse sont des fonctions continues du temps, on en déduit $z(t=0) = H$ et $\dot{z}(t=0) = 0$.

53. On écrit le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle en tenant compte de la valeur du facteur de qualité $r^2 + 2\omega_o r + \omega_o^2 = (r + \omega_o)^2$. Il présente une racine double $r_d = -\omega_o (r + \omega_o)^2$.

La solution générale de l'équation homogène est de la forme $S_H(t) = (At + B)\exp(-\omega_o t)$

Sa dérivée s'exprime $\dot{S}_H(t) = A\exp(-\omega_o t) - \omega_o (At + B)\exp(-\omega_o t)$

Les conditions initiales donnent alors : $S_H(0) = H = B$ et $\dot{S}_H(0) = A - \omega_o B$

On en déduit $z(t) = H(1 - \omega_o t)\exp(-\omega_o t)$

54. Pour la fonction de transfert (1) : $|\underline{H}_1| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} H_o$ et $|\underline{H}_1| \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0$

Pour la fonction de transfert (2) : $|\underline{H}_2| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$ et $|\underline{H}_2| \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} H_o$

Pour la fonction de transfert (3) : $|\underline{H}_3| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$ et $|\underline{H}_3| \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0$

55. En observant les courbes de la figure 12, on retrouve les comportements asymptotiques présentés par la fonction de transfert (1) qui donnera donc la réponse fréquentielle en amplitude de la suspension.

56. La valeur du facteur de qualité permettant le retour le plus rapide à l'équilibre est toujours $Q_c = \frac{1}{2}$.

On observe alors que $\underline{H}_1(j\omega_o) = -jQ_c H_o$ et l'amplitude de la réponse en amplitude est $|\underline{H}_1|(f_o) = \frac{H_o}{2}$

57. On lit sur le graphique que $|\underline{H}_1| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} H_o = 1$, on en déduit que $|\underline{H}_1|(f_o) = 0,5$, on en déduit la fréquence propre par lecture graphique $f_o = 1,2 Hz$. On en déduit $k = \frac{M_o}{4} (2\pi f_o)^2 = 2,3 \cdot 10^4 kg \cdot s^{-2}$

On déduit alors la valeur du coefficient d'amortissement par $Q_c = \frac{1}{2} = \frac{1}{h} \sqrt{km}$ d'où $h = \pi f_o M_o = 6,0 \cdot 10^3 kg \cdot s^{-1}$

58. On observe sur la courbe de réponse du véhicule ancien un maximum qui correspond au phénomène de résonance. La condition d'observation de la résonance en amplitude, identique à la résonance en tension du RLC, est $Q > Q_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Pour étudier cette réponse on écrit le module de la réponse complexe $|\underline{H}_1| = \frac{H_o}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_o}\right)^2}}$

Cette amplitude présente un maximum si l'argument de la racine au dénominateur présente un minimum.

On exprime donc sa dérivée par rapport à la pulsation $-4\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)\frac{\omega}{\omega_0^2} + \frac{2\omega}{Q^2\omega_0^2}$

Et on recherche les racines ce qui amène après factorisation à $\omega=0$ ou $-2\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) + \frac{1}{Q^2} = 0$

Ce qui donne $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$, la résonance n'est alors possible que si $\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) > 0$ soit $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

La pulsation de résonance s'exprime alors $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

59. En reprenant l'énoncé, la masse $m=0,25*M_0$ est la même que pour le véhicule neuf, et puisque l'amortisseur est le principal élément victime de la fatigue de fonctionnement, on fait également l'hypothèse que la constante de raideur est la même que pour le véhicule neuf $k' = k = 2,3.10^4 \text{ kg.s}^{-2}$

La pulsation propre est donc identique à celle du véhicule neuf et on lit $|H_1|(f_0) = QH_0 = H_0 \frac{1}{h'} \sqrt{k'm}$

On avait établi $H_0=0$, d'où $h' = \frac{H_0}{2|H_1|(f_0)} * h$. La lecture graphique donne $|H_1|(f_0) = H_0 Q_a = 2$ et

$$h' = 1,5.10^3 \text{ kg.s}^{-1}$$

60. En surcharge, on obtient pour le véhicule neuf $f_o' = f_o \sqrt{\frac{M_o}{M_c}} = 1,1 \text{ Hz}$ et $Q_n' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M_c}{M_o}} = 0,56$

Pour le véhicule ancien $f_o' = f_o \sqrt{\frac{M_o}{M_c}} = 1,1 \text{ Hz}$ et $Q_a' = Q_a \sqrt{\frac{M_c}{M_o}} = 2,2$

La charge va diminuer la fréquence propre et augmenter le facteur de qualité, mais les valeurs obtenues restent raisonnables tant que la masse totale reste sous la valeur autorisée. Si on dépasse ces valeurs, la résonance déjà forte sur le véhicule ancien peut devenir vraiment dangereuse à gérer.

Partie 4 : Résolution de problème.

61. Si on utilise la même corde avec la même tension pour les deux instruments, la célérité des ondes progressives le long de ces cordes sera identique. En effet, l'étude dimensionnelle sur la célérité des ondes sur la corde amène à :

La célérité $[c] = LT^{-1}$

La tension : $[T] = M.LT^{-2}$

La masse linéique $[\mu] = M.L^{-1}$

On aboutit à $[c] = [T]^{\frac{1}{2}} [\mu]^{-\frac{1}{2}}$ puis à $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

On sait que la longueur d'onde pour le fondamental des ondes stationnaires sur une corde est $\lambda_1 = 2L$

Pour la corde Mi_0 de la contrebasse, on obtient $c = \lambda_{Mi} f_{Mi} = 2L_C f_{Mi}$ où L_C est la longueur de la corde Mi_0 .

Avec le même type de corde, pour une longueur L_0 sur l'octobasse, on jouerait une note de fréquence fondamentale

$c = 2L_0 f_1$ ce qui donne $f_1 = \frac{L_C}{L_0} f_{Mi} = 19,8 \text{ Hz}$

Cette fréquence ne correspond à aucune des notes jouées sur les cordes 1, 2 ou 3 de l'octobasse. On en conclut qu'il faut modifier le type de corde pour construire l'octobasse, ou qu'il faut modifier les tensions à appliquer sur ces cordes.

62. On modifie la note jouée par une corde en réduisant sa longueur, mais en gardant les mêmes conditions par ailleurs, c'est-à-dire en gardant la même célérité.

Il faut donc placer les doigts de manière à ce que la longueur restante permette de jouer les notes suivantes :

$c = 2L_{Do} f_{Do} = 2L_{Re} f_{Re} = 2L_{Mi} f_{Mi}$ ce qui donne $L_{Re} = L_{Do} \frac{f_{Do}}{f_{Re}} = 1,94m$ soit une réduction de 24cm et

$L_{Mi} = L_{Do} \frac{f_{Do}}{f_{Mi}} = 1,72m$ soit une réduction de 46cm de la longueur d'origine de la corde