

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les réponses finales aux questions posées.

L'usage de calculatrices est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'exploration martienne.

Au cours du siècle dernier, de très nombreux auteurs de science-fiction ont écrit autour de l'exploration de la planète Mars et de ce que nous pourrions y découvrir. C'est certainement un jour au cours de ce siècle, que l'homme foulera le sol martien comme Neil Armstrong l'a fait pour la Lune le 21 juillet 1969... Dans l'attente de ce grand jour, ce sont des robots qui nous précèdent.

Partie 1 : Perseverance.

Lancé depuis la Terre le 30 juillet 2020 grâce à un lanceur Atlas V, le rover Perseverance a atterri sur la planète Mars le 18 février 2021. Le site d'atterrissage, le cratère Jezero, est une zone présentant une grande diversité géologique et dont on pense qu'il a abrité un lac il y a environ 3,6 milliards d'années. Un des enjeux de cette mission est le prélèvement d'échantillons destinés à être analysés sur Terre afin de déceler d'éventuelles traces d'une vie passée.

A. L'atterrissage de Perseverance.

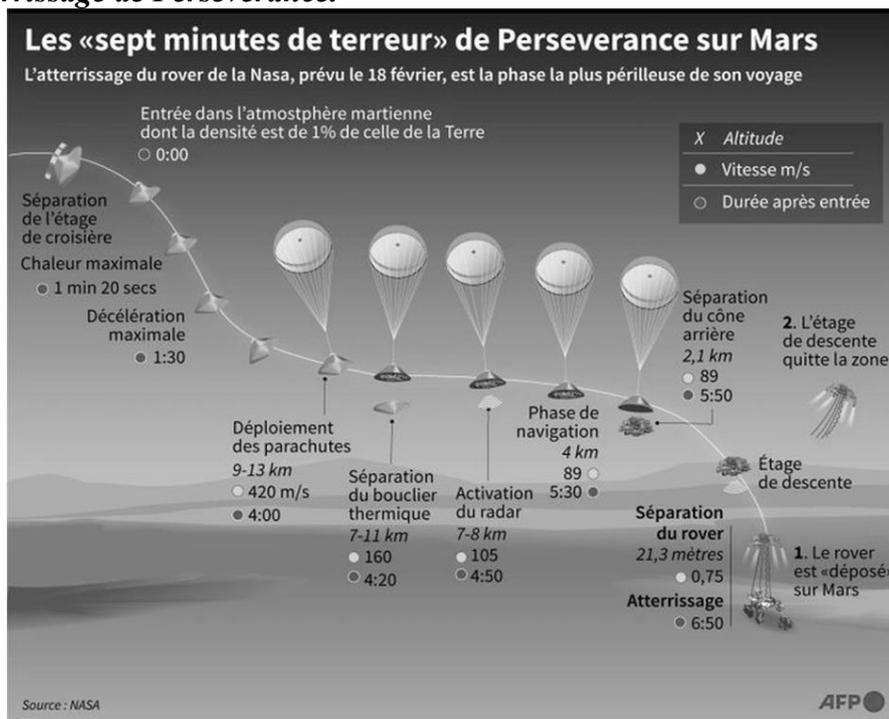


Figure 1 : documentation sur l'atterrissage de Perseverance.

La sonde spatiale Mars 2020, de masse m , pénètre dans l'atmosphère martienne à la vitesse de $12\,000\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ (vitesse mesurée par rapport au sol), elle larguera le rover 7 minutes plus tard. Après une première phase de freinage grâce au bouclier thermique, le parachute est déployé à l'altitude z_A d'environ $10,6\text{ km}$, la vitesse de la sonde est alors v_A et sa valeur numérique est de $420\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

1. En modélisant la sonde comme un point matériel, exprimer l'énergie cinétique $E_C(A)$ de la sonde.

Au bout de 20 secondes, la vitesse est descendue à $v_B=160\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et l'altitude atteinte est $z_B=7,5\text{ km}$. La sonde Mars 2020 largue alors son bouclier thermique.

A la surface de la planète Mars, il règne un champ de pesanteur dont l'accélération notée g présente une valeur numérique de $3,7\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

2. Exprimer le poids exercé sur la sonde par la planète Mars ainsi que l'énergie potentielle associée. Exprimer alors le travail $W_{AB,g}$ de cette force entre les points A et B. Le poids est-il alors moteur ou résistant vis-à-vis du mouvement ?
3. Quelle autre force agira sur la sonde au cours de la chute de A en B ?
4. Enoncer et appliquer proprement le théorème de l'énergie cinétique entre A et B pour la sonde et en déduire l'expression du travail des forces de frottements sur le parachute $W_{AB,f}$ en fonction de m, v_A, v_B, z_A, z_B et g . Faire l'application numérique pour une masse $m=3,0 \cdot 10^3 \text{ kg}$ et commenter le résultat obtenu.

Dans la suite, on suppose que la chute s'effectue selon un déplacement purement vertical, et on suppose que la force de frottement est de type fluide linéaire $f = -h\vec{v}$ où h est le coefficient de frottement fluide et \vec{v} le vecteur vitesse.

5. A partir de la seconde loi de Newton, établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse le long de l'axe vertical et la mettre sous forme canonique en faisant apparaître un temps caractéristique τ et une vitesse limite v_{lim} dont on donnera les expressions en fonction de g, m et h .

Pour pouvoir réussir cette phase périlleuse, l'étage de descente (le skycrane) dispose d'un radar Doppler comportant six antennes dévoilées dès que le bouclier thermique est largué. Le radar peut alors déterminer avec précision la vitesse et l'altitude de la sonde. La bande de fréquences K.a. (Kurz Above) du spectre électromagnétique est très utilisée dans le domaine des télécommunications spatiales. On considère que l'onde émise présente une valeur moyenne $f_m=30\text{GHz}$.

6. Rappeler la valeur numérique de c la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide. Exprimer et évaluer numériquement la longueur d'onde dans le vide λ_0 de l'onde émise par le radar Doppler. Indiquer le domaine des ondes électromagnétiques auquel il appartient.

La sonde peut déterminer avec précision l'altitude H à laquelle elle se situe en déterminant la durée sur laquelle l'onde émise fait un aller-retour vers le sol.

7. Exprimer la durée Δt de l'aller-retour en fonction de l'altitude H et de la célérité c . Evaluer numériquement cette durée au moment où la sonde largue son bouclier thermique.

La sonde exploite également l'effet Doppler pour estimer la vitesse de la chute. On utilise le modèle simplifié suivant pour en illustrer le principe. On suppose que la sonde émet des impulsions de durée négligeable à intervalle de temps régulier T . L'impulsion numéro 0 est émise à l'instant initial $t=0$ pour lequel la sonde est située à l'altitude H . On supposera que la vitesse de chute est constante égale à v .

8. Exprimer les dates t_k auxquelles les impulsions sont émises. Exprimer alors les dates t'_k auxquelles les impulsions arrivent au sol en fonction de H, k, T, v et c . En déduire l'intervalle de temps T' séparant l'arrivée de deux impulsions au sol, puis l'écart $(T'-T)$ en fonction de T, v et c .

L'onde se propageant sur un aller-retour vers le sol, on considère qu'il faut doubler la valeur précédente pour obtenir δT la différence de période mesurée par la sonde entre le signal émis et le signal reçu.

9. Exprimer δT puis en déduire que le décalage de fréquence entre l'onde réfléchie et l'onde émise s'exprime

$$\delta f = f'_m - f_m = \frac{2v}{c} f_m. \text{ Faire l'application numérique en B et commenter le résultat.}$$

B. La communication.

Les rovers tels que Perseverance peuvent communiquer directement avec la Terre via deux antennes à 8GHz mais aussi avec les sondes orbitales, appelées orbiters et situées à 400 km en orbite autour de Mars. Ces sondes orbitales transmettent les données reçues à la Terre lorsque celle-ci est dans le champ de leur antenne. Ainsi, les rovers économisent de l'énergie.

Bien que la technologie ait évolué considérablement dans ce domaine, historiquement, l'émission et la réception d'ondes ont été possibles grâce à l'association de simples dipôles passifs dans un circuit modélisable par la simple association en série d'une bobine idéale d'inductance propre L , d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C .

On reproduit ce circuit au laboratoire, de manière à rester dans un domaine de fréquences étudiable avec les instruments d'électrocinétique à notre disposition, et on réalise donc l'étude 6 décades sous la fréquence réelle de travail de l'antenne.

On considère dans un premier temps un circuit RLC schématisé en **figure 2**. Le condensateur est initialement déchargé et le circuit est alimenté par une source de tension continue notée E . On considérera les valeurs suivantes : $R=2,0 \cdot 10^2 \Omega$, $C=10\text{nF}$ et $L=40\text{mH}$. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

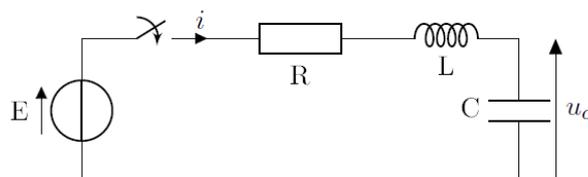


Figure 2 : Circuit RLC alimenté par une tension continue

10. Etudier le régime stationnaire avant fermeture de l'interrupteur et en déduire $u_C(t=0^-)$ et $i(t=0^-)$. En déduire, en justifiant proprement la réponse, les expressions de $u_C(t=0^+)$ et de $i(t=0^+)$.
11. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ sur l'intervalle $t \in [0, +\infty[$, la mettre sous forme canonique en introduisant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q , dont on donnera l'expression en fonction de L , C et R .
12. Exprimer et évaluer numériquement la fréquence propre f_0 et justifier l'expression utilisée précédemment « on se place 6 décades sous la fréquence de travail réelle de l'antenne ».
13. Evaluer le facteur de qualité Q et indiquer la nature du régime transitoire qui sera observé dans ces conditions.

On remplace la source d'alimentation du circuit par un GBF fournissant une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$.

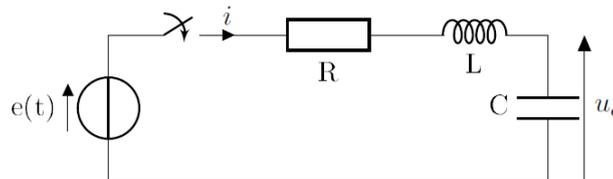


Figure 3 : circuit RLC alimenté par une tension sinusoïdale

14. Exprimer Z_{eq} l'impédance équivalente au circuit R, L, C série.
15. Donner l'expression de la tension complexe d'alimentation $\underline{e}(t)$ et son lien avec $e(t)$.
16. Expliquer pourquoi on cherche l'intensité circulant dans le circuit sous la forme $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$. Indiquer la forme sous laquelle on écrit alors l'intensité complexe $\underline{i}(t)$.
17. Déterminer l'expression de l'amplitude complexe de $\underline{i}(t)$ et la mettre sous la forme suivante

$$\underline{I} = \frac{I_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Préciser les expressions de I_0 , Q et ω_0 en fonction de E , R , L , C et ω .

18. Exprimer alors l'amplitude I de l'intensité réelle. Faire une représentation graphique en précisant, sans démonstration, la pulsation pour laquelle elle sera maximale et la largeur à $1/\sqrt{2}$ de la courbe.

Dans le circuit étudié précédemment, la puissance est fournie par un GBF qui fixe la fréquence du régime sinusoïdal. On peut envisager de faire évoluer ce circuit à la fréquence de résonance, uniquement en introduisant un circuit à ALI appelé circuit à résistance négative en série avec les trois éléments passifs. Le schéma de ce circuit est présenté sur la figure 4.

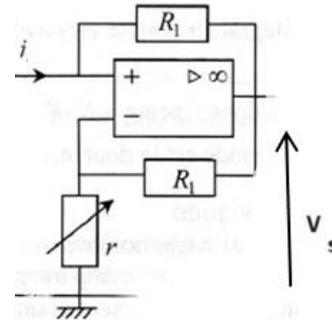


Figure 4 : Circuit à résistance négative.

19. Rappeler les hypothèses valables dans le modèle de l'ALI idéal. En déduire l'expression de V_+ en fonction de V_S , i et R_1 , puis en déduire l'expression de V_- en fonction de V_S , r et R_1 .
20. Expliquer pourquoi on peut faire l'hypothèse d'un régime de fonctionnement linéaire. Quelle est alors la relation qu'on peut écrire ? En déduire que la relation caractéristique de ce circuit s'écrit sous la forme $U = V_+ = R_{eq} i$ en précisant l'expression de R_{eq} . Justifier le nom donné à ce circuit.

On introduit alors ce circuit dans le précédent pour aboutir au schéma donné sur la figure 5.

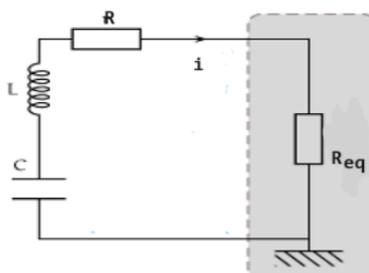


Figure 5 : circuit global incluant le circuit à résistance négative.

21. Exprimer l'impédance équivalente à l'association des quatre dipôles. En déduire que l'intensité dans le circuit vérifie l'équation différentielle $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R+R_{eq}}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$
22. Comment peut-on faire pour que cette équation s'identifie à celle de l'oscillateur harmonique ? Préciser l'expression qu'il faut donner à r pour remplir cette condition.
23. Montrer alors que le circuit oscille spontanément à la même fréquence propre que celle du circuit RLC initial.
24. Faire un bilan de puissance sur ce circuit. Montrer alors qu'en moyenne, la puissance fournie par le circuit à ALI compense la perte de puissance par effet Joule dans la résistance. Expliquer pourquoi ce circuit à ALI peut fournir cette puissance.

Dans les questions suivantes, nous allons étudier la transmission d'information directe entre le rover sur Mars et la Terre.

25. Mars s'éloigne de la Terre à la distance maximale d'environ 300 millions de km. Estimer la durée τ nécessaire à un signal radio pour parcourir cette distance. Conclure.

Nous pouvons nous demander pourquoi il n'y a pas de caméra HD sur le rover. On sait qu'une image 4K de taille 4096x2160 pixels est codée sur 32 bits par pixel et le débit moyen utilisé pour la transmission Mars-Terre est de 0,25 Moctet·s⁻¹.

26. Calculer le poids d'une image 4K en Mo (on prendra 1 Mo = 10⁶ octets).
27. Calculer la durée nécessaire pour transmettre une vidéo de 1 seconde avec une cadence de 24 images par seconde depuis Mars vers la Terre. Commenter.

Partie 2 : l'expérimentation.

A. Le spectromètre imageur SuperCam.

La SuperCam installée sur Perseverance est une version fortement améliorée de l'instrument franco-américain ChemCam embarqué sur l'astromobile Curiosity qui avait été déployé avant lui sur Mars. Elle utilise un laser et trois spectromètres pour analyser à distance la composition élémentaire et minérale des roches ciblées. Un microphone, appelé Mars Microphone, est disposé sur la tête optique au sommet du mât du rover. Il enregistre, entre autres, les sons de claquage des étincelles des plasmas produits par le laser qui permettent d'en déduire différents paramètres physiques venant ainsi améliorer l'analyse des spectres LIBS (Laser Induced Breakdown Spectroscopy, que l'on peut traduire par spectroscopie à dégradation induite par laser). Ces sons, souvent appelés de manière imagée "impacts laser", sont audibles jusqu'à une distance de 4 mètres.

28. L'atmosphère martienne est principalement constituée de dioxyde de carbone CO₂. Calculer la masse molaire de ce gaz en kg·mol⁻¹.

La thermodynamique permet d'obtenir une expression de la célérité des ondes sonores dans un gaz parfait donnée par $c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$, où γ est le coefficient de compressibilité adiabatique du gaz, R la constante des gaz parfaits, M la masse molaire du gaz et T la température en Kelvin.

29. Evaluer numériquement c_M la valeur de la célérité des ondes sonores sur Mars. Comparer la à celle observée sur Terre.

Document sur Supercam et ChemCam issu du site décrivant ce matériel

(Source : <http://www.mls-chemcam.com>)

Le laser pulsé équipant la caméra SuperCam émet un rayonnement à la longueur d'onde $\lambda=1,067\mu\text{m}$, chaque impulsion délivre une énergie $E_{\text{imp}}=15\text{mJ}$ et présente une durée $T_{\text{imp}}=5\text{ns}$. L'interaction du faisceau laser pulsé de forte puissance avec un matériau provoque un échauffement brutal de la surface éclairée, une vaporisation et une ionisation sous forme d'un plasma. Il est important de comprendre que le plasma se formera si, au niveau de la cible, la puissance par unité de surface (appelée aussi irradiance) est supérieure au seuil $P_{\text{seuil}}=1,0\text{GW}\cdot\text{cm}^{-2}$.

C'est pourquoi SuperCam est pourvue d'un système de focalisation du faisceau laser qui est tel qu'au niveau de la cible le diamètre du faisceau est d'environ $D = 400 \mu\text{m}$. Dans ces conditions, les atomes et les ions éjectés sont alors dans des niveaux d'énergie excités. En se désexcitant, ils émettent un rayonnement qui est analysé par spectroscopie sur une plage de longueur d'onde allant de 250 à 900 nm. On obtient ainsi un spectre d'émission atomique. La détermination des longueurs d'onde de raies présentes sur ce spectre permet d'identifier les atomes ou ions présents dans la cible.

30. Dans quel domaine des ondes électromagnétiques le laser émet-t-il ?
31. Un laser émet une lumière quasi-monochromatique. Que signifie ce terme ?
32. Montrer que les caractéristiques du faisceau laser utilisé par SuperCam permettent bien d'obtenir une irradiance suffisante pour créer un plasma.

Afin de vérifier que l'analyseur spectral de SuperCam fonctionne bien, on réalise en laboratoire le spectre d'émission atomique d'une roche témoin contenant l'élément calcium. On donne ci-dessous le tableau des raies d'émission de l'ion Ca^+ dont on attend la présence dans le plasma produit à partir de cette roche.

Longueur d'onde (nm)	394	397	423	443	444	446
----------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Le spectre obtenu lors de cette expérience est présenté sur la figure 6.

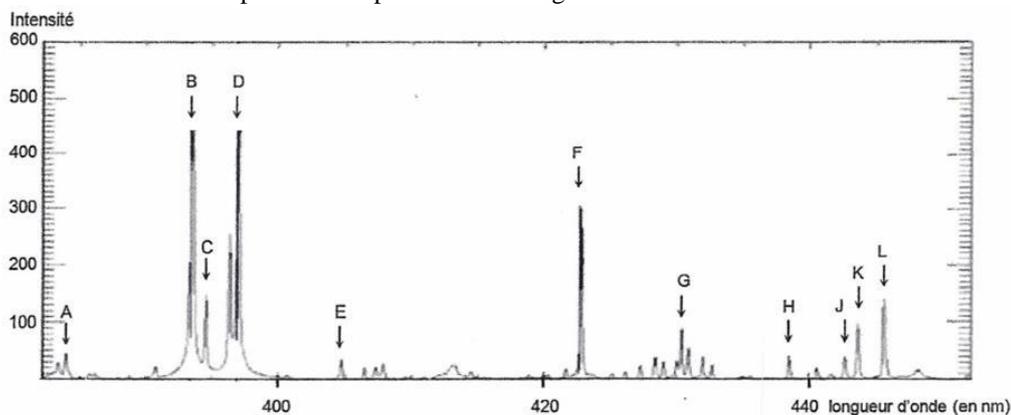


Figure 6 : spectre d'émission d'une roche témoin.

33. Expliquer pourquoi ce spectre permet de vérifier le bon fonctionnement de l'analyseur de spectre.

A partir du laser embarqué dans la SuperCam, il est nécessaire de faire converger le faisceau de diamètre initial égal à 3,0mm pour atteindre le seuil de $1\text{GW}\cdot\text{cm}^{-2}$ sur la cible. Le dispositif complexe est schématisé sur la figure 7.

À la sortie du laser, un doublet afocal (lunette de Galilée renversée) **élargit** le faisceau. Celui-ci est ensuite injecté dans un télescope de type Cassegrain utilisé en émetteur. Le même télescope est aussi utilisé en " récepteur " pour collecter la lumière émise par la cible mais cette partie ne sera pas étudiée. Le dispositif décrit correspond à un système en configuration afocale qui sera modélisé à l'aide de deux doublets afocaux constitués de lentilles simples positionnées sur un axe optique unique.

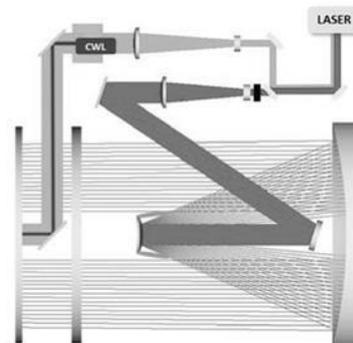


Figure 7 : Schéma global du télescope.

La lunette de Galilée renversée est modélisée par une lentille divergente L_1 de distance focale $f_1 = -20$ mm suivie d'une lentille convergente L_2 de distance focale $f_2 = 100$ mm. Ces deux lentilles constituent le premier doublet afocal. Les lentilles ne limitent pas l'étendue du faisceau. On suppose que le faisceau lumineux incident modélisant le faisceau laser est cylindrique et qu'il présente un diamètre de 3,0mm.

34. Le système est utilisé dans les conditions de l'approximation de Gauss ce qui permet un stigmatisme et un aplanétisme approché. Énoncer ces conditions proprement et définir les notions de stigmatisme et d'aplanétisme.
35. Préciser ce qu'on appelle « système afocal ». Préciser alors la configuration dans laquelle doivent être placées les deux lentilles.
36. Réaliser un schéma de la lunette de Galilée renversée en illustrant la marche du faisceau cylindrique incident (constitué de rayons parallèles à l'axe optique), à travers les deux lentilles L_1 et L_2 . Expliquer alors le choix qui est fait pour l'ordre dans lequel le faisceau traverse les lentilles.
37. A partir de ce schéma, exprimer et évaluer numériquement le diamètre du faisceau à la sortie du système.

B. Ingenuity.

Source : Dossier Presse Mars 2020
www.cnes.fr



En mai 2018, la NASA a annoncé que Perseverance embarquera un petit hélicoptère expérimental MHS (Mars Helicopter Scout) pesant 1,8kg, baptisé Ingenuity, il testera l'intérêt du recours à des vols de reconnaissance optique sur Mars. L'expérimentation doit durer une trentaine de jours.

Il se déplace dans les airs grâce à deux rotors bipales tournant en sens contraires. La vitesse de rotation est d'environ 2500 tours par minute, soit dix fois celle des pales d'un hélicoptère sur Terre. En effet, l'atmosphère martienne étant très ténue, l'air y est peu dense et nécessite donc une vitesse de rotation plus importante pour que l'appareil se soulève du sol.

La théorie de Rankine-Froude date de la fin du XIXe siècle. Ses concepteurs visaient à modéliser le fonctionnement macroscopique des hélices marines pour prédire leur poussée et la puissance nécessaire à leur rotation. Elle permet également de mettre en relation la puissance P d'un hélicoptère et la force de poussée F fournie $P = \sqrt{\frac{F^3}{2\rho S}}$ où ρ est

la masse volumique de l'atmosphère martienne et S la surface balayée par les pales de l'hélicoptère dont le rayon est égal à $R_p=60\text{cm}$ sur Ingenuity.

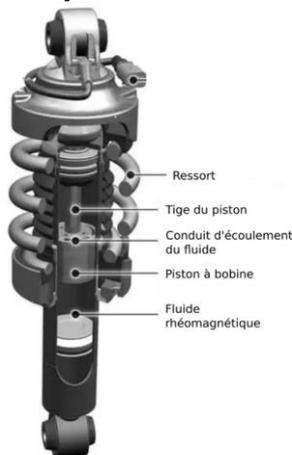
38. On sait que l'atmosphère martienne est environ 100 fois moins dense que l'atmosphère terrestre et on rappelle que l'accélération de la pesanteur martienne a pour valeur $g=3,7\text{m.s}^{-2}$. Déterminer l'ordre de grandeur de la puissance nécessaire pour qu'Ingenuity effectue un vol stationnaire où la force de Poussée compense l'action de la gravité.
39. Evaluer numériquement, en rad.s^{-1} , la vitesse de rotation d'une des hélices. En déduire l'expression et la valeur numérique de la vitesse correspondante pour un point en bout de pale. Comparer à la vitesse du son dans l'atmosphère martienne et commenter.

Le moment d'inertie d'une pale par rapport à son axe de rotation est approximativement $J = \frac{mR^2}{12}$ où m est sa masse

et R sa longueur. Le moment cinétique de cette pale s'exprime alors $\vec{L} = J\Omega\vec{e}_z$ où Ω est la vitesse de rotation et \vec{e}_z est le vecteur unitaire donnant la direction et le sens de l'axe de rotation.

40. Evaluer numériquement le moment d'inertie puis le moment cinétique d'une des hélices bipales, chaque pale présentant une masse de 100g.
41. On voit que deux hélices contrarotatives sont associées dans la conception d'Ingenuity. Quel est le moment cinétique de la deuxième hélice ? Quelle est l'utilité du caractère contrarotatif de ce dispositif ?

Partie 3 : suspension de véhicule.



Les suspensions d'un véhicule ont pour objectif principal d'assurer la meilleure tenue de route possible, de façon à garantir la sécurité des occupants. Il existe de nombreux types de suspensions dont le rôle est notamment de contrôler le déplacement vertical d'un véhicule. Par la suite, nous allons nous intéresser aux suspensions à ressorts disposant d'amortisseurs. Différents éléments participent à l'amortissement mais tous les effets seront ramenés au niveau des suspensions dont seul le déplacement vertical est étudié. L'étude est menée dans le référentiel terrestre supposé galiléen et l'on note $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ l'accélération du champ de pesanteur.

Figure 8 : Schéma d'une suspension à ressort avec amortisseur.

A. Suspension sans amortisseur.

42. Donner un exemple de référentiel galiléen. Préciser le ou les liens qui existent entre deux référentiels galiléens.

Le véhicule de masse M , repose de façon équivalente sur quatre suspensions identiques. On note alors m la masse supportée par un seul amortisseur.

43. Quelle masse m supporte un amortisseur ?

On modélise la suspension sans amortisseur d'une voiture par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , sur lequel repose la masse m (figure 9).

44. Déterminer la longueur à l'équilibre ℓ_{eq} du ressort en fonction de g , k , ℓ_0 et m .
45. Donner en fonction de k et m l'expression de la pulsation propre du système. Justifier par une analyse dimensionnelle.

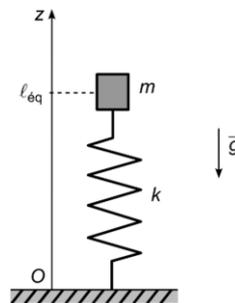
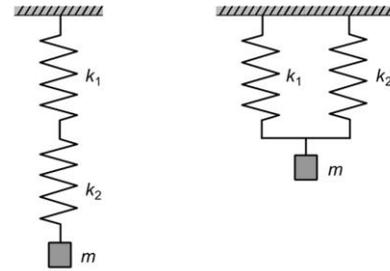


Figure 9 : suspension à ressort.

Une association simple de deux ressorts peut se faire en série ou en parallèle. On considère deux ressorts de même longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k_1 et k_2 . Selon l'association réalisée, la constante de raideur équivalente vaut k_s pour deux ressorts en série, et k_p pour deux ressorts en parallèle.

46. Montrer que, pour une association de deux ressorts en parallèle, $k_p=k_1+k_2$.

47. Les quatre amortisseurs étant supposés identiques, donner l'expression de la constante de raideur équivalente k_V de l'ensemble du véhicule, en fonction de la constante k de l'un d'entre eux.
48. En déduire l'expression de la pulsation propre du véhicule Ω_0 en fonction de ω_0 .



Ressorts en série Ressorts en parallèle

Figure 10 : associations série et parallèle de deux ressorts.

B. Suspension avec amortisseur.

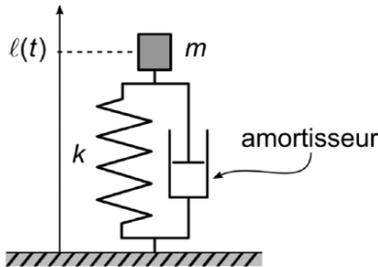


Figure 11 : suspension à amortisseur.

Pour le confort des occupants du véhicule, il est préférable de réduire rapidement les oscillations déclenchées par les irrégularités de la chaussée. Pour ce faire, la suspension comporte un dispositif amortisseur (figure 11) qui exerce une force de frottement fluide notée $\vec{F}_f = -h\vec{v}$.

49. Montrer qu'en régime libre, l'équation du mouvement vertical de la masse m soutenue par la suspension munie d'un amortisseur se met sous la forme $\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0$ où $z(t) = l(t) - l_0 + \frac{mg}{k}$.

Déterminer les expressions de ω_0 et Q en fonction de k , h et m .

50. En déduire en fonction de h et m , la valeur limite k_C de k permettant le retour le plus rapide du système à sa position d'équilibre en précisant le régime correspondant.
51. Quel régime est alors susceptible d'être observé si le véhicule circule en situation de surcharge, c'est-à-dire pour une masse embarquée supérieure à la masse permettant le retour le plus rapide à l'équilibre ?

On considère un véhicule qui tombe d'une marche de hauteur H . On prend pour origine temporelle l'instant de passage de la hauteur $z=H$ à la hauteur $z=0$. On suppose que le régime transitoire est celui permettant le retour le plus rapide à la position d'équilibre.

52. Indiquer les conditions initiales pour $z(t=0)$ et $\dot{z}(t=0)$.
53. Déterminer l'expression de $z(t)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

On suppose maintenant que des véhicules sont soumis à un test de sécurité lors du passage du contrôle technique. On les place sur un banc permettant de les exciter selon un régime sinusoïdal de fréquence variable. L'amplitude des oscillations obtenues a été enregistrée, ce qui permet d'obtenir les courbes de réponse fréquentielle présentées sur la figure 12. Cette courbe est identique à celle d'un filtre linéaire d'ordre 2 en électrocinétique.

On rappelle pour les différents filtres d'ordre 2 les fonctions de transferts associées :

$$H_1 = \frac{H_0}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} ; H_2 = \frac{H_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} ; H_3 = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

54. Effectuer l'étude asymptotique à basse fréquence et haute fréquence pour ces trois fonctions de transfert afin d'en dégager le comportement limite de leur module.
55. Déterminer alors à quelle fonction de transfert correspondent les courbes de la figure 12.

Le véhicule neuf présente une masse totale avec le conducteur $M_0=1,6.10^3$ kg. On suppose qu'il est conçu en respectant la contrainte de réponse rapide lors du passage d'une bosse.

56. Quelle est la valeur du facteur de qualité respectant au mieux la contrainte de retour le plus rapide à l'équilibre ? Quelle est alors la valeur du gain du filtre lorsqu'on est à la fréquence propre du système ?
57. En déduire par une lecture graphique la valeur de la constante de raideur k du ressort sur une des quatre suspensions. Déterminer également la valeur numérique du facteur h dans cette situation.

Lorsqu'un véhicule est ancien, la fatigue des éléments de la suspension se traduit principalement par une diminution de la force d'amortissement. On suppose que ce véhicule ancien présente la même masse M_0 .

58. Quel phénomène apparaît sur la courbe de réponse du véhicule ancien ? Rappeler la condition sur la valeur du facteur de qualité pour que ce phénomène apparaisse. Faire la démonstration et exprimer la pulsation associée.
59. En précisant proprement les hypothèses faites, déterminer les valeurs de la constante de raideur du ressort k' et du facteur d'amortissement h' pour le véhicule ancien.

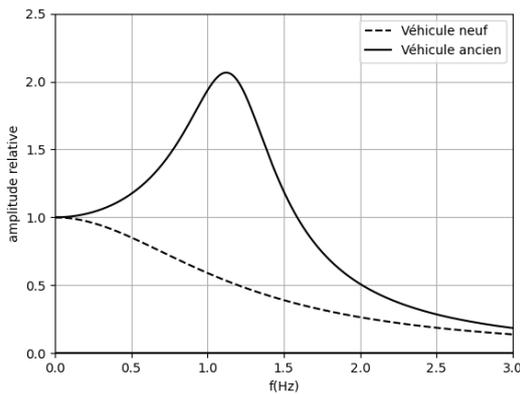


Figure 12 : réponse en amplitude de la suspension

Lorsqu'un véhicule est surchargé, présentant une masse totale supérieure à la valeur prévue, son comportement peut devenir surprenant et présenter un danger. On considère le même véhicule qu'avant, chargé pour atteindre une masse totale $M_C=2,0 \cdot 10^3 \text{ kg}$ qui est le maximum autorisé.

60. Expliquer l'effet de cette surcharge sur la réponse fréquentielle de la suspension pour le véhicule neuf et pour le véhicule ancien en évaluant les valeurs de la fréquence propre et du facteur de qualité. Commenter les valeurs obtenues.

Ensemble de données utiles sur le sujet :

- Constante des gaz parfaits : $R=8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Célérité de la lumière dans le vide : $c=3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Conversion d'unité d'énergie : $1 \text{ eV}=1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.
- Conversion d'unité de température : $T(\text{Kelvin})=\theta(^{\circ}\text{C})+273$.
- Nombre d'Avogadro : $N_A=6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
- Masse volumique moyenne de l'atmosphère terrestre : $\rho=1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Masses molaires : $M(\text{H})=1,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M(\text{C})=12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M(\text{O})=16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.
- Coefficient de compressibilité adiabatique pour le dioxyde de carbone : $\gamma=1,40$.
- Température moyenne à la surface de Mars $\theta_M=-63^{\circ}\text{C}$.

Partie 4 : Résolution de problème.

L'histoire des violons remonte à la création de la famille au XVI^{ème} siècle en Italie. La recherche d'instruments à cordes avec ce timbre particulier mais capables de jouer des notes plus graves a conduit à l'élaboration de la contrebasse puis de l'octobasse. En 2010, l'atelier de lutherie de Mirecourt de J.J. Pagès a reproduit à l'identique l'octobasse décrite dans les documents d'époque.

L'octobasse possède trois cordes (1, 2 et 3) jouant respectivement les notes Do_{-1} , Sol_1 et Do_0 lorsqu'elles sont laissées libres sur l'ensemble de leur longueur qui est de 2,18m. L'instrument est si grand que le musicien doit monter sur un escabeau pour frotter les cordes avec l'archet. Il doit également jouer à l'aide de manettes qui actionnent des doigts métalliques d'appuyant sur les cordes pour en réduire la longueur afin de jouer des notes plus hautes dans la gamme.

61. Le son le plus grave joué sur une contrebasse est un Mi_0 , la longueur de la corde jouant cette note est de 1,05m. Le luthier peut-il utiliser une corde de même nature supportant la même tension pour fabriquer une des cordes de l'octobasse ?
62. Comment faut-il placer les doigts métalliques pour jouer sur la corde 1 un Ré_{-1} , un Mi_{-1} ou un Fa_{-1} ?



Tableau des notes graves (les fréquences listées sont données en Hz) :

Numéro d'octave	-1	0	1
Do	16,3	32,7	65,4
Ré	18,3	36,7	73,4
Mi	20,6	41,2	82,4
Fa	21,8	43,6	87,3
Sol	24,5	49	98,0
La	27,5	55	110
Si	30,9	61,7	123