Problème 1 : Brève histoire de protons accélérés par le LHC au CERN.

A. Particule dans un champ électrostatique uniforme.

1. La force de Lorentz est exercée par le champ électrostatique sur le proton : $\boxed{\vec{F}_{L,\vec{E}} = e\vec{E}}$

Le poids exercé par la Terre sur le proton s'exprime $\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$ où $\vec{g}$ est l'accélération de la pesanteur.

On compare leurs normes $\dfrac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{F}_{L,\vec{E}}\|} = \dfrac{mg}{eE} \approx 10^{-12}$, **le poids est bien négligeable devant la force de Lorentz**.

2. On applique la seconde loi de Newton au proton soumis à la seule force de Lorentz $\left(\dfrac{d\vec{p}}{dt}\right) = m\vec{a} = \vec{F}_L$ ce qui donne $\boxed{\vec{a} = \dfrac{e}{m}\vec{E}}$ une accélération constante.
3. On introduit le potentiel électrostatique par la relation $dV = -\vec{E}.d\overrightarrow{OM}$

On intègre entre la position x=0 et la position x, on obtient $V(x) = V_O - Ex$

On vérifie que le travail élémentaire de la force s'exprime

$\delta W = -e\vec{E}d\overrightarrow{OM} = -edV = -dE_P$ ce qui permet d'obtenir $\boxed{E_p(x) = eV(x)}$.

4. La seule force sur le proton est la force de Lorentz qui est conservative, l'énergie mécanique est donc conservée entre la plaque d'entrée et la plaque de sortie.

On en déduit $E_M(x=0) = E_M(x=L)$ d'où $0 + eV_O = E_C + eV_L$ ce qui donne finalement $\boxed{E_C = e.U}$.

B. Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2.

5. On reprend le résultat de la question 4 : $\boxed{E_{C,O} = e.U_O}$ puis on utilise la définition de l'énergie cinétique pour obtenir $\boxed{v_O = \sqrt{\dfrac{2e.U_O}{m}}}$.
6. On reprend le raisonnement fait en q4 pour obtenir au cours de la traversée entre le tube (n) et le tube (n+1) $E_{M,n} = E_{M,n+1}$ et on obtient l'accroissement d'énergie cinétique $\boxed{E_{C,n+1} = E_{C,n} + eU_C}$

On peut alors proposer pour expression de l'énergie cinétique à la sortie du tube numéro n $E_{C,n} = e(U_O + nU_C)$

Après avoir franchi le tube numéro 0 l'énergie cinétique est bien $E_{C,O} = e.U_O$ (initiation)

Si la relation est vraie jusqu'au rang k, $E_{C,k} = e(U_O + kU_C)$ on applique la relation établie pour trouver $E_{C,k+1} = e(U_O + (k+1)U_C)$ (hérédité)

La récurrence est donc prouvée et on peut donc écrire $\boxed{E_{C,n} = e(U_O + nU_C)}$

7. La vitesse atteinte à la sortie du tube n° n s'exprime $\boxed{v_n = \sqrt{\dfrac{2e}{m}(U_O + nU_C)}}$ A.N : $\boxed{v_9 = 5{,}9.10^7 m}$
8. On observe que $\boxed{\dfrac{v_9}{c} = 0{,}20 < 0{,}33}$, le proton reste donc non relativiste avec le critère fourni.
9. On lit bien sur le graphique une amplitude de la tension U(t) égale à U_C=200kV. On pourra donc bien accélérer les protons avec cette tension dans les espaces intertubes, en synchronisant correctement la tension avec le passage des protons.
10. Lorsqu'on est à la sortie d'un tube pair, il faut que $(V_A-V_B)=U_C$ pour que le proton soit accéléré jusqu'au tube impair suivant.

- **Il faut que le proton arrive sur cet espace intertube (pair→impair) lorsque la tension U(t) passe par un maximum +U_C.**
- **De manière similaire, il faut que le proton arrive sur un espace intertube (impair→pair) lorsque U(t) passe par un minimum égale à –U_C.**

11. Le proton doit donc traverser un tube (quelquesoit le numéro) sur la durée qui s'écoule entre un minimum et un maximum c'est-à-dire sur une demi période T/2.

La lecture graphique de la période donne $\boxed{T = 40ns}$

12. Le tube n°n doit donc présenter une longueur $\boxed{L_n = v_n \dfrac{T}{2} = T\sqrt{\dfrac{e}{2m}\left(U_O + nU_C\right)}}$

A.N : $\boxed{L_O = 12,4cm}$ et $\boxed{L_9 = 1,18m}$ soit une longueur multipliée par 10 lorsqu'on passe du premier au dixième tube. On observe donc que le LINAC s'allonge très vite lorsqu'on ajoute des étages, le LINAC devient alors rapidement encombrant en longueur

C. Du Linac2 au synchrotron à proton (PS).

13. Dans le champ magnétostatique, le proton subit la force $\boxed{\vec{F}_{L,\vec{B}} = e.\vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_O}$.
14. On exprime la puissance de cette force $\boxed{P = \vec{F}_{L,\vec{B}}.\vec{v}_{M/R} = e\left(\vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_O\right).\vec{v}_{M/R} = 0}$ car ce produit mixte comprend deux fois le vecteur vitesse.

Par application du théorème de la puissance cinétique au proton soumis à la force magnétique on obtient alors $\dfrac{dE_C}{dt} = P_{\vec{B}} = 0$, **<u>cette force ne peut pas modifier l'énergie cinétique du proton</u>**.

15. L'ordre de grandeur de la force exercée est estimée par exemple à partir de la vitesse v_O établie en q5. ce qui donne $\boxed{\left\|\vec{F}_{L,\vec{B}}\right\| = e.v_O B_O \approx 10^{-15} N}$

Alors $\dfrac{\left\|\vec{P}\right\|}{\left\|\vec{F}_{L,\vec{B}}\right\|} \approx 10^{-11}$ **<u>Le poids sera à nouveau négligeable dans cette étude</u>**.

16. On applique la 2LN au proton soumis à la seule force magnétique dans le reférentiel du laboratoire supposé galiléen : $\left(\dfrac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right) = m\vec{a}_{M/R} = \vec{F}_{L,\vec{B}} = e.\vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_O$

On exploite la base de projection cartésienne $m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = e\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\ 0\\ B_O\end{pmatrix}$ d'où $\boxed{\begin{cases}\ddot{x} = \omega_C \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_C \dot{x} \quad avec \quad \omega_C = \dfrac{eB_O}{m} \\ \ddot{z} = 0\end{cases}}$

<u>On appelle ω_C la pulsation cyclotron.</u>

17. On pose la variable $u = x + jy$,

L'équation différentielle vérifiée par cette variable est $\ddot{u} + j\omega_C \dot{u} = 0$

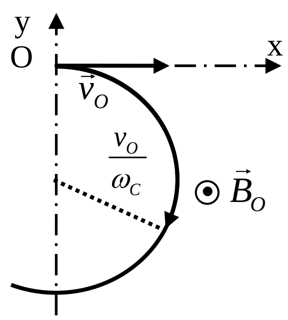
Avec les conditions initiales $u(t=0) = 0 \quad et \quad \dot{u}(t=0) = v_O$

La solution générale de l'équation différentielle est $S_H(t) = \underline{A}\exp(-j\omega_C t)$

Avec la condition initiale, on obtient $\underline{A} = v_O \quad \dot{u}(t) = v_O \exp(-j\omega_C t)$

On intègre cette expression pour obtenir $u(t) - u(0) = v_O \int_0^t \exp(-j\omega_C t')dt' = \dfrac{v_O}{-j\omega_C}\left(\exp(-j\omega_C t) - 1\right)$

On en déduit $u(t) = \dfrac{v_O}{\omega_C}\left(\sin(\omega_C t) - j\left[1 - \cos(\omega_C t)\right]\right)$



Alors les coordonnées du proton suivent les lois horaires $\boxed{x(t) = \dfrac{v_O}{\omega_C}\sin(\omega_C t)}$ et $\boxed{y(t) = \dfrac{v_O}{\omega_C}\left(\cos(\omega_C t) - 1\right)}$

On observe alors que la trajectoire du proton est circulaire de rayon $\boxed{\dfrac{v_O}{\omega_C}}$ de centre $\boxed{(x_C, y_C) = \left(0, -\dfrac{v_O}{\omega_C}\right)}$ **<u>parcourue dans le sens horaire lorsque l'axe (Oz) pointe vers nous</u>**.

18. On souhaite que le rayon de la trajectoire circulaire soit $\dfrac{D}{2} = \dfrac{v_n}{\omega_C} = \dfrac{m}{eB_O}\sqrt{\dfrac{2e}{m}\left(U_O + nU_C\right)}$

Ce qui donne $B_O = \dfrac{2}{D}\sqrt{\dfrac{2m}{e}\left(U_O + nU_C\right)} = 2,8.10^{-4} T$. Cette valeur reste relativement faible.

Problème 2 : Satellites GPS.

1. La force de gravitation s'exprime $\boxed{\vec{F} = -\frac{GmM_T}{r^2}\vec{u}_{O\to M}}$ où $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_{O\to M}$
2. On écrit le théorème du moment cinétique en O le centre de la Terre pour le satellite soumis à la seule force de gravitation $\boxed{\left(\frac{d\vec{L}_{O/M}}{dt}\right) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F} = \vec{0}}$ puisque $\overrightarrow{OM}\,//\,\vec{F}$.

Le moment cinétique du satellite est donc conservé, on l'écrit sous la forme $\boxed{\vec{L}_{O/M} = mC\vec{u}_z}$

3. Le moment cinétique s'exprime $\vec{L}_{O/M} = \overrightarrow{OM}\wedge\left(m\vec{v}_{M/R}\right)$, le vecteur position est donc astreint à se situer dans le plan passant par O et perpendiculaire au moment cinétique. **<u>La trajectoire du satellite par conséquent inscrite dans ce plan</u>**.
4. On exprime le moment cinétique dans cette base :

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$; $\vec{v}_{M/R} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$; $\vec{L}_{O/M} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z = mC\vec{u}_z$

On établit donc que $r^2\dot{\theta}$ est une grandeur conservée avec $\boxed{r^2\dot{\theta} = C}$.

L'aire élémentaire balayée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ pendant une durée δt s'exprime comme d'aire du triangle OM(t)M(t+δt) donnée par $\delta A = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM}\wedge d\overrightarrow{OM}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}_{M/R}\right\|\delta t = \frac{1}{2m}\left\|\vec{L}_{O/M}\right\|\delta t = \frac{C}{2}\delta t$

<u>On démontre alors la seconde loi de Kepler, dite loi des aires dont l'énoncé est le suivant.</u>

- **<u>Le vecteur position balaie des aires égales sur les durées égales.</u>**
- **<u>Le facteur de proportionnalité entre la durée considérée et l'aire balayée est égale à C/2, où C est la constante des aires.</u>**

5. On exprime le travail élémentaire $\delta W = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = -\frac{GmM_T}{r^2}dr = -d\left(-\frac{GmM_T}{r}\right) = -dE_P$

On en déduit que cette force est conservative associée à l'énergie potentielle $\boxed{E_P = -\frac{GmM_T}{r}}$ en prenant comme convention une énergie potentielle nulle quand r⟶+∞

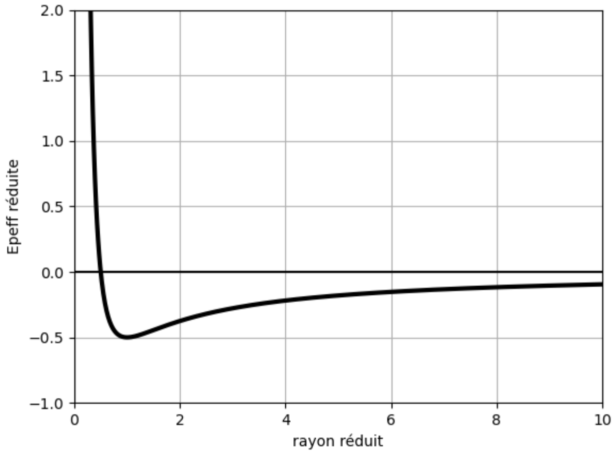
6. Lorsque le satellite n'est soumis qu'à la force de gravitation conservative, le système et conservatif et l'énergie mécanique est conservée.

Elle s'exprime $E_M = E_C + E_P = \frac{m}{2}\vec{v}_{M/R}^2 - \frac{GmM_T}{r} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 - \frac{GmM_T}{r}$

On obtient alors en exploitant la relation $r^2\dot{\theta} = C$ $E_M = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GmM_T}{r}$ qui est bien de la forme demandée $\boxed{E_M = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}}$ avec $\boxed{A = GmM_T}$ et $\boxed{B = \frac{mC^2}{2}}$

7. La fonction $E_{p,eff} = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$ est appelée énergie potentielle effective.

Son allure est donnée ci-contre.



Le satellite est sur un état lié lorsque l'énergie mécanique est négative, sa trajectoire est elliptique dans le cas général et circulaire lorsque l'énergie mécanique s'identifie au minimum de $E_{P,eff}$.

Le satellite est sur un état de diffusion lorsque l'énergie mécanique est positive, sa trajectoire est hyperbolique, ou lorsque l'énergie mécanique est nulle, sa trajectoire est alors parabolique.

8. On applique la 2LN au satellite dans le référentiel géocentrique : $\left(\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right) = \vec{F}$.

On projette dans la base polaire selon le vecteur $\vec{e}_r$ $-mr_O\dot{\theta}^2 = -\frac{GmM_T}{r_O^2}$ ce qui donne $\boxed{v_O = r_O\dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_O}}}$

9. Sur une période T, le satellite parcourt le périmètre de la trajectoire circulaire soit $2\pi r_O$ à la vitesse v_O d'où $v_O = \frac{2\pi r_O}{T}$ puis $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r_O^3}{GM_T}}}$ A.N $r_O = \frac{4.10^7}{2\pi} + 2.10^7$ $\boxed{T = 4,25.10^4 s = 11h48\min}$

On compare alors au jour sidéral $\boxed{\frac{T}{T_J} \approx 0,5}$ la période du satellite est proche d'un demi jour sidéral.

10. C'est la troisième loi de Képler qui est vérifiée ici. La période de rotation du système étudié autour du centre d'attraction pour une trajectoire circulaire est reliée ua rayon de la trajectoire par une relation universelle de la forme $\boxed{\frac{T^2}{r_O^3} = K = \frac{4\pi^2}{GM_T}}$.

11. On écrit l'expression de l'énergie mécanique $E_M = E_C + E_P = \frac{m}{2}v_O^2 - \frac{GmM_T}{r}$

On exploite l'expression de v_O en q8 pour obtenir $\boxed{E_M = \frac{-GmM_T}{2r_O}}$

12. On écrit le théorème de l'énergie cinétique, ou le théorème de l'énergie mécanique en tenant compte du travail de la fusée sur le satellite ce qui donne $E_{M,1} - E_{M,0} = W_{01}$

Avec les données et les résultats précédents, on obtient alors $\boxed{W_{01} = m\left(\beta - \alpha\cos^2(\lambda) - \frac{GM_T}{R_1}\right)}$

<u>Pour que ce travail à fournir soit minimal, il faut que cosλ soit maximal, il faut donc que la latittude soit nulle</u>, le pas de tir doit être le plus proche possible de l'équateur.

13. En observant la figure, on obtient $\boxed{2a = R_1 + R_2}$

On peut alors exprimer l'énergie mécanique sur l'orbite elliptique en prenant l'expression montrée pour la trajectoire circulaire et en substituant ($2r_O$) par ($2a$) ce qui donne ici $\boxed{E_{M,H} = \frac{-GmM_T}{R_1 + R_2}}$

14. On reprend le raisonnement énergétique précédent pour obtenir

$\boxed{W_{1H} = E_{M,H} - E_{M,1} = GmM_T\left(\frac{1}{2R_1} - \frac{1}{R_1 + R_2}\right)}$ et $\boxed{W_{H2} = E_{M,2} - E_{M,H} = GmM_T\left(\frac{1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{2R_2}\right)}$

15. Au total le travail à fournir est

$$\boxed{W_{Tot} = W_{01} + W_{1H} + W_{H2} = E_{M,2} - E_{M,0} = m\left(\beta - \alpha\cos^2(\lambda) - \frac{GM_T}{2R_2}\right)}$$

16. Le transfert énergétique libéré en brulant la masse $m_{\min}$ d'ergol doit permettre de fournir le travail amenant le satellite sur l'orbite haute en partant de l'équateur ce qui donne $m_{\min}.\Delta h = W_{Tot}$ On obtient $\boxed{m_{\min} = \frac{m}{\Delta h}\left(\beta - \alpha - \frac{GM_T}{2R_2}\right)}$ où R_2 est le rayon de l'orbite du satellite GPS. L'A.N donne : $\boxed{m_{\min} = 55 Tonnes}$.

On observe que cette masse est colossale. Le satellite à placer en orbite représente une portion minime (de l'ordre du %) de la masse totale de la fusée au décollage.

17. En exploitant l'analogie, on remplace r_O par a dans l'expression de la période $\boxed{T_{ellipse} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_T}}}$

On exploite la loi des aires. L'aire balayée du périgée à l'apogée est la moitié de l'aire totale de l'ellipse, la durée de transfert représente donc la moitié de la période du satellite sur l'orbite elliptique.

$\boxed{T_H = \frac{T_{ellipse}}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{(R_1+R_2)^3}{2GM_T}}}$ A.N : $\boxed{T_H = 2h53\min}$

18. Un satellite géostationaire est un satellite fixe à la verticale au dessus d'un point de la Terre dans le référentiel terrestre.

La trajectoire du satellite est forcément dans un plan contenant le centre O de la Terre, si ce plan n'est pas le plan équatorial, le satellite se situe la moitié du temps au dessus de l'hémisphère nord et la moitié du temps au dessus de l'hémisphère sud. **Le satellite doit donc se situer dans le plan équatorial pour être géostationnaire**.

De plus, sa période de rotation doit être identique à celle de la Terre. On en déduit le rayon de la trajectoire du satellite géostationnaire par la troisième loi de Kepler $\frac{T_J^2}{R_{Stat}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

On obtient donc $\boxed{R_{Stat} = \left(\frac{GM_T T_J^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 4,23.10^7\,m}$

Un satellite géostationnaire est toujours placer au-dessus d'un même point de la Terre, il peut donc servir aux télécommunications, à l'observation météo, ou toutes autres missions pour laquelle sa stationnarité est intéressante.

19. On peut déjà remarquet qu'un satellite géostationnaire est dans le plan de l'équateur, il est don impossible de faire un système GPS performant lorsqu'on s'apporche des pôles avec ce type de satellite.

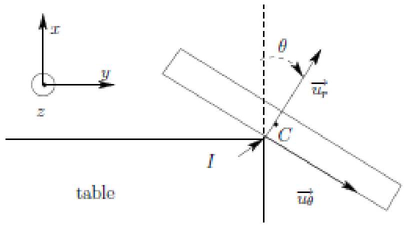
D'autre part pour que 4 satellites soient visibles en même temps depuis un point de la Terre avec cette configuration, il faudrait beaucoup plus de satellites que dans la configuration réalisée en pratique.

Problème 3 : Tartine beurrée.

1. On étudie la rotation de la tartine autour de l'axe Iz fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen de repère spatial (Oxyz). On se place dans la base de projection indiquée sur le schéma $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

Le bilan des actions mécaniques sur la tartine est le suivant :

- L'action de gravité vue comme un glisseur de résultante $\vec{P} = m\vec{g}$ appliquée en C. Le moment de l'action de gravité par rapport à l'axe Iz est alors $M_G = mgb\sin\theta$
- L'action de contact vue comme un glisseur de résultante $\vec{R}$ appliquée en I. Son moment par rapport à Iz est nul.



2. On applique le théorème du moment cinétique pour la tartine par rapport à Iz, on obtient : $\boxed{J\ddot{\theta} = mgb\sin\theta}$
3. On passe alors à la forme théorème de l'énergie cinétique en multipliant par $\dot{\theta}$ l'équation précédente ce qui donne : $J\dot{\theta}\ddot{\theta} = mgb\dot{\theta}\sin\theta$ ce qui donne : $d\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\right) = d(-mgb\cos\theta)$

On montre donc que l'énergie mécanique $\boxed{E_M = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgb\cos\theta}$ **est une grandeur conservée.**

4. On exploite la conservation de l'énergie mécanique entre l'état initial $(\theta = 0, \dot{\theta} = 0)$ et un état quelconque pour obtenir $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgb\cos\theta = mgb$

La vitesse de rotation est alors : $\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2mgb}{J}(1-\cos\theta)}}$

5. On applique la 2ième loi de Newton pour la tartine avec les actions mécaniques décrites précédemment $\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right) = m\vec{a}_C = \vec{P} + \vec{R}$

Pour la cinématique de C le centre d'inertie : $\overrightarrow{IC} = b\vec{e}_r$; $\vec{v}_C = b\dot{\theta}\vec{e}_\theta$; $\vec{a}_C = -b\dot{\theta}^2\vec{e}_r + b\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$

On projette selon $\vec{e}_r$: $\boxed{N = mg\cos\theta - mb\dot{\theta}^2 = mg\left(\left(1+\frac{2mb^2}{J}\right)\cos\theta - \frac{2mb^2}{J}\right)}$

On projette selon $\vec{e}_\theta$: $\boxed{T = -mg\sin\theta + mb\ddot{\theta} = mg\left(\frac{mb^2}{J} - 1\right)\sin\theta}$

6. On constate que $|T| = -T$ est une fonction strictement croissante de valeur initiale nulle. On constate également que $|N| = N$ est strictement décroissante, positive en 0 et négative en π/2, qui s'annule donc en $\theta_1<\pi/2$. $f|N|-|T|$ s'annule nécessairement sur l'intervalle $[0, \theta_1]$ et la tartine ne peut donc pas quitter le coin de table sans glisser.
7. On suppose que le glissement commence pour θ_O, au moment où $|T| = f|N|$

On obtient donc : $\boxed{f = \frac{(J - mb^2)\sin\theta_O}{(J+2mb^2)\cos\theta_O - 2mb^2} = \frac{(a^2+b^2)\sqrt{2}}{(a^2+10b^2)\sqrt{2} - 12b^2}}$ A.N : $\boxed{f = 0{,}99}$

8. La vitesse de rotation de la tartine est celle en fin de rotation, à $\theta_O = \pi/4$: $\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{2mgb}{J}(1-\cos\theta_O)} = \sqrt{\frac{3gb}{a^2+4b^2}\left(2-\sqrt{2}\right)}}$ A.N : $\boxed{\Omega = 6{,}4 rad.s^{-1}}$
9. La seule action mécanique sur la tartine est l'action de gravité. On applique la seconde loi de Newton ce qui donne : $\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right) = m\vec{a}_C = \vec{P}$ On projette sur l'axe Ox vertical : $\boxed{\ddot{z} = -g}$
10. On intègre l'équation précédente en tenant compte des conditions initiales $\dot{z}(0) = 0$; $z(0) = h$ ce qui donne : $\dot{z}(t) = -gt$ et $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$. On traduit $z(t_C)=0$ ce qui donne $\boxed{t_C = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$

A.N : $\boxed{t_C = 0{,}39s}$. Les chances d'avoir des réflexes suffisamment aiguisés au petit déjeuner pour rattraper cette tartine sont bien minces.

11. Pour la position angulaire, on obtient : $\boxed{\theta_C = \theta_O + \Omega t_C}$ A.N : $\boxed{\theta_C = 3{,}29 rad}$

On obtient une position angulaire comprise entre π et π+π/4. La tartine finira indubitablement sur le sol avec la partie beurrée collée au sol ce qui peut être facilement vérifié chaque fois qu'une de vos tartines tombent de la table au petit matin.