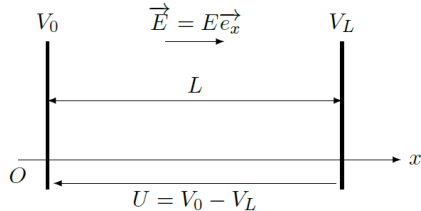


**Problème 1 : Brève histoire de protons accélérés par le LHC au CERN.**

Dans ce problème, nous étudions la trajectoire des protons dans le Large Hadron Collider (LHC). Il est formé d'une succession d'accélérateurs, d'énergies toujours croissantes. Chaque accélérateur injecte un faisceau de protons dans la machine suivante, qui prend le relais pour porter ce faisceau à une énergie encore plus élevée, et ainsi de suite.

Tous les accélérateurs de particules sont composés de la même façon : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions.

**A. Particule dans un champ électrostatique uniforme.**

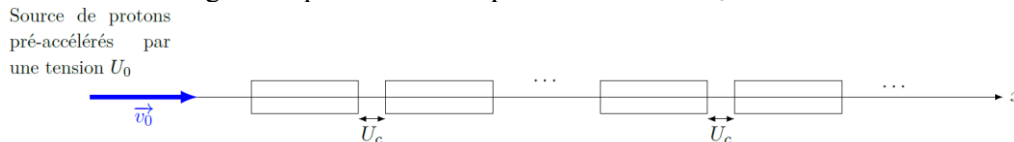


On considère le système ci-contre dans lequel on plonge un proton de charge électrique  $e=1,60.10^{-19}C$  et de masse  $m=1,67.10^{-27}kg$  dans un champ électrostatique uniforme  $\vec{E} = E.\vec{e}_x$  de norme  $E=100kV.m^{-1}$ .

1. Exprimer et nommer la force subie par le proton de la part du champ électrostatique. Exprimer également le poids exercé sur le proton. Montrer que ce dernier est négligeable.
2. En utilisant la seconde loi de Newton, exprimer l'accélération du proton dans ce système. Commenter son expression.
3. Introduire le potentiel électrostatique associé au champ et donner son expression en fonction de  $V_0$ ,  $E$  et  $x$ . Montrer que la force est conservative et le lien entre potentiel électrostatique et énergie potentielle.
4. En supposant que le proton entre dans le système avec une énergie cinétique négligeable, exprimer l'énergie cinétique atteinte en sortie de la zone d'accélération en fonction de  $e$  et  $U$ .

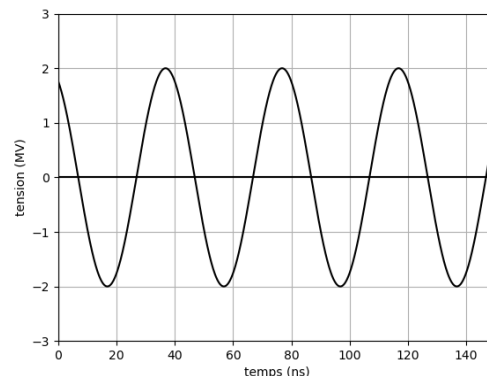
**B. Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2.**

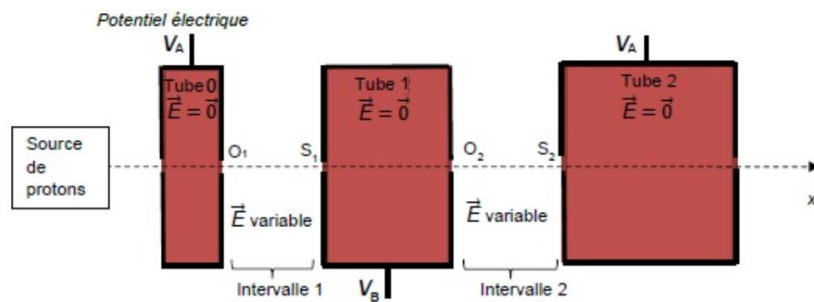
L'accélérateur linéaire 2 constitue le point de départ des protons utilisés dans les expériences menées au CERN. Les protons passent dans une série de conducteurs métalliques coaxiaux. On considère que le champ est nul à l'intérieur des conducteurs. Ces protons sont accélérés par une tension  $U_C$  toutes les fois qu'ils passent d'un tube à l'autre. On considérera que la distance entre deux tubes est négligeable par rapport à la longueur des tubes. Les protons sont injectés en  $O$  avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0.\vec{e}_x$  parallèle à l'axe de l'accélérateur et générée par une tension pré-acceleratrice  $U_0$ .



5. En reprenant les résultats précédents, exprimer l'énergie cinétique  $E_{C,0}$  puis la vitesse  $v_0$  des protons en entrée du système en fonction de  $e$ ,  $U_0$  et  $m$ .
6. Exprimer l'accroissement d'énergie cinétique d'un proton après la traversée d'un espace entre deux tubes. Par une récurrence réfléchie, établir l'expression de l'énergie cinétique d'un proton à la sortie du tube numéro  $n$ , en désignant le premier tube par l'entier  $n=0$ .
7. Exprimer la vitesse atteinte par le proton à la sortie du tube numéro  $n$  et l'évaluer numériquement à la sortie du 10<sup>ième</sup> tube pour des tensions  $U_0=200kV$  et  $U_C=2000kV$ .
8. Si on prend comme critère qu'une particule reste non relativiste dès que sa vitesse reste inférieure au tiers de la vitesse de la lumière, le proton étudié est-il relativiste ?

Pour réaliser l'accélération dans les espaces inter-tubes, on emploie une tension alternative d'une tension  $U(t)$  représentée ci-contre. Elle est imposée entre deux tubes successifs selon le schéma donné ci-dessous et dans lequel on supposera que  $U(t)=V_A(t)-V_B(t)$ . On souhaite qu'à chaque fois que le proton atteint la sortie du tube numéro  $n$ , il soit effectivement accéléré par la tension  $U_C=2000kV$ .

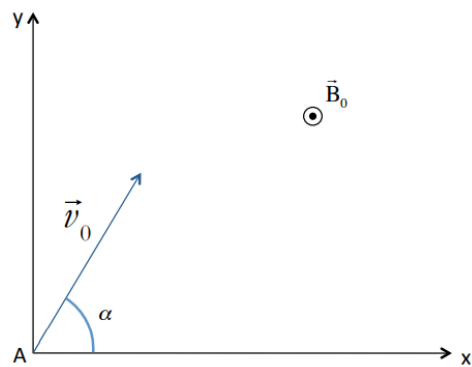




9. Déterminer sur le graphique précédent l'amplitude de la tension  $U(t)$  et vérifier la cohérence de cette valeur avec la tension de travail envisagée précédemment.  
On rappelle qu'on suppose depuis le début que le temps de traversée des espaces entre les tubes est suffisamment court pour être négligé.
10. Indiquer à quel moment le proton doit traverser l'espace situé entre deux tubes pour être effectivement accéléré avec la tension  $U_C$  (on distinguera le cas des tubes de numéro pair et des tubes de numéro impair).
11. En déduire la durée de la traversée d'un tube par le proton en fonction de la période  $T$  de la tension sinusoïdale. Faire la lecture graphique de la période  $T$ .
12. Déterminer la longueur du tube numéro  $n$ , évaluer là numériquement pour le premier tube et pour le  $10^{\text{ième}}$  tube. Commenter les valeurs obtenues.

### C. Du Linac2 au synchrotron à proton (PS).

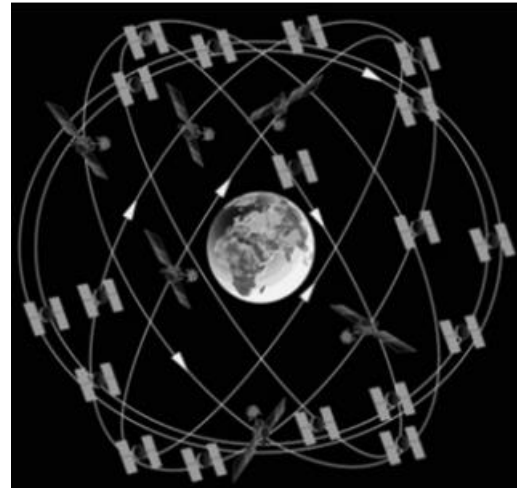
Un élément fondamental du complexe accélérateur est le synchrotron à protons (PS). Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le PS a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC. On considère un proton injecté en A dans le synchrotron où règne un champ magnétostatique uniforme  $\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_z$ . À l'instant initial ( $t=0$ ) sa vitesse  $\vec{v}_0$  est perpendiculaire au champ magnétostatique.



13. Donner l'expression de la force subie par le proton plongé dans le champ magnétostatique.
14. Montrer que la puissance de cette force est nulle et qu'elle ne peut donc pas modifier l'énergie cinétique du proton.
15. Calculer un ordre de grandeur de la norme de cette force pour un champ magnétique d'amplitude  $10^{-3}\text{T}$  et montrer que le poids sera à nouveau négligeable dans cette étude.
16. Etablir les équations du mouvement du proton dans la base de projection cartésienne  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .  
On introduira une pulsation  $\omega_C$  dont on donnera le nom usuel ainsi que l'expression en fonction de  $e$ ,  $B_0$  et  $m$ .
17. Résoudre le système d'équations dans le cas où l'angle  $\alpha$  est pris nul, et le point A est confondu avec l'origine O du repère pour exprimer  $x(t)$  et  $y(t)$ . En déduire la nature de la trajectoire, en précisant toutes les caractéristiques associées. Faire une représentation graphique.  
Le synchrotron à proton du CERN est construit autour d'un anneau de stockage dans lequel les protons tournent avant d'être exploités pour les expériences. Il présente un diamètre  $D=7,0\text{km}$ . On suppose que les protons étudiés sont issus du système d'accélérateurs présentés en partie B et que leur vitesse est celle évaluée en question 7 à la sortie du  $10^{\text{ième}}$  tube accélérateur.
18. Evaluer la norme du champ magnétique à appliquer pour assurer le stockage des protons dans cet anneau.

**Problème 2 : Satellites GPS.**

Le principe du positionnement par GPS (Global Positioning System ou Géopositionnement Par Satellite) repose sur la mesure de la durée de transit d'un signal transmis par une onde électromagnétique (OEM) entre des satellites dont la position est exactement connue à tout instant, dénommés NAVSTAR (NAVigation Satellite Timing And Ranging) et un récepteur. Cette durée est ensuite simplement convertie en distance puisqu'on connaît très précisément la célérité d'une OEM. Pour une précision optimale, un récepteur sur Terre doit « voir » au minimum quatre satellites simultanément.



Le système comprend vingt-quatre satellites placés sur des orbites pratiquement circulaires d'altitudes voisines de  $2,00 \times 10^4$  km. Les satellites sont placés sur six orbites dont le plan est incliné de  $55^\circ$  par rapport au plan de l'équateur. Ces orbites sont décalées en longitude de  $60^\circ$ . Sur chaque orbite, il y a quatre satellites. On notera pour information que les satellites ne sont pas régulièrement espacés sur leur orbite. Leur répartition a été choisie pour optimiser le nombre de satellites visibles en chaque point de la Terre à un instant « t ».

On considère un satellite modélisé par un point matériel M de masse m dans le référentiel géocentrique d'origine O situé au centre de la Terre de masse  $M_T = 6,00 \cdot 10^{24}$  kg. On notera G la constante de gravitation universelle. Sa valeur numérique est  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  USI. On rappelle également que le périmètre de la Terre est d'environ  $4,00 \cdot 10^4$  km

1. Rappeler l'expression de la force de gravitation  $\vec{F}$  exercée par la Terre sur le satellite en fonction de la distance r entre O et M, de G, de m, de  $M_T$  et d'un vecteur unitaire à préciser à l'aide d'un schéma.
2. Montrer que  $\vec{L}_{O/M}$  le moment cinétique en O du satellite est une grandeur conservée.

On note alors le moment cinétique sous la forme  $\vec{L}_{O/M} = mC\vec{u}_z$

3. Expliquer pourquoi la trajectoire du satellite se situe dans un plan.

On introduit la base polaire dans le plan de la trajectoire du satellite associée aux coordonnées (r,θ).

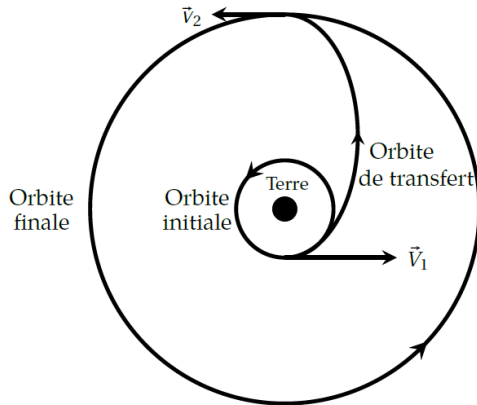
4. Montrer que la grandeur  $r^2\dot{\theta}$  se conserve au cours du mouvement et donner son expression en fonction de C. En déduire, par une démonstration complète, une des lois de Kepler dont on donnera proprement l'énoncé final.
5. Montrer que la force de gravitation  $\vec{F}$  est associée à une énergie potentielle  $E_P(r)$  dont l'expression sera précisée en fonction de G, m,  $M_T$  et r.
6. Montrer que l'énergie mécanique  $E_M$  du satellite est conservée puis établir qu'elle peut s'écrire sous la forme suivante  $E_M = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$  où A et B sont des constantes à préciser en fonction de G, m,  $M_T$  et de C.
7. Comment appelle-t-on la fonction  $E_{p,eff} = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$  ? Tracer son allure et préciser la nature du mouvement et de la trajectoire des satellites en fonction de leur énergie mécanique. On prendra soin de parler du cas particulier de la trajectoire circulaire.

On considère le cas particulier d'un satellite sur une trajectoire circulaire de rayon  $r_0$ .

8. Etablir l'expression de la vitesse  $v_0$  du satellite sur la trajectoire circulaire en fonction de G,  $M_T$  et  $r_0$ .
9. En déduire l'expression de T la période de révolution du satellite autour de la Terre en fonction de G,  $M_T$  et  $r_0$ . Faire l'application numérique pour un satellite NAVSTAR, comparer cette période à la durée d'un jour sidéral terrestre, c'est-à-dire le temps mis par la Terre pour faire un tour sur elle-même dans le référentiel géocentrique donnée par  $T_J = 23$ h 56min 4s.

10. Quelle est la loi de Kepler vérifiée ici ? Etablir la relation associée et en faire un énoncé complet.  
11. Redémontrer complètement l'expression de l'énergie mécanique du satellite sur la trajectoire

circulaire de rayon  $r_0$  donnée par 
$$E_M = \frac{-GmM_T}{2r_0}$$



Le placement d'un satellite sur son orbite définitive s'effectue très schématiquement en trois phases :

- Phase 1 : mise en orbite basse initiale supposée circulaire de rayon  $R_1=R_T+h_1$ , où  $h_1=1,5.10^3$ km.
- Phase 2 : on fournit au satellite sur l'orbite basse une impulsion très brève pour qu'il atteigne la vitesse  $\vec{V}_1$ , il est alors placé au périégée d'une orbite de transfert elliptique (dite de Hohmann) dont l'apogée est situé sur l'orbite définitive.
- Phase 3 : lorsque le satellite passe à l'apogée avec une vitesse  $\vec{V}_2$  sur l'orbite de transfert, on lui fournit une seconde impulsion pour le placer sur l'orbite définitive de rayon  $R_2$ .

On montre que l'énergie mécanique du satellite posé sur son pas de décollage situé à la latitude  $\lambda$  s'exprime sous la forme  $E_{M,pas} = m\alpha \cos^2(\lambda) - m\beta$  avec  $\alpha=1,08.10^5$ J.kg<sup>-1</sup> et  $\beta=6,29.10^7$ J.kg<sup>-1</sup>.

12. Exprimer  $W_{01}$  le travail que doit fournir la fusée au satellite pour le placer sur l'orbite basse. Quelle est la valeur optimale de la latitude pour que la mise sur orbite basse soit la moins coûteuse possible énergétiquement ?
13. Exprimer le grand axe ( $2a$ ) de l'orbite elliptique de transfert en fonction de  $R_1$  et  $R_2$ . Rappeler alors l'analogie à faire entre orbite circulaire et orbite elliptique pour exprimer  $E_{M,H}$  l'énergie mécanique du satellite sur l'orbite de transfert en fonction de  $G$ ,  $m$ ,  $M_T$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .
14. Exprimer alors  $W_{1H}$  le travail à fournir à la fusée pour la placer sur l'orbite de transfert au périégée,  $W_{H2}$  le travail à fournir à la fusée pour la placer sur l'orbite finale à l'apogée.
15. Exprimer finalement  $W_{Tot}$  le travail total à fournir pour placer le satellite sur l'orbite finale.

Les propergols solides utilisés comme carburant dans les fusées présentent un pouvoir calorifique de l'ordre de  $\Delta h=1$ MJ.kg<sup>-1</sup> donnant le transfert énergétique disponible lorsqu'ils sont brûlés.

16. Exprimer  $m_{min}$  la masse minimale d'ergols qu'il faut brûler pour placer le satellite en orbite. Faire l'application numérique pour un satellite de une tonne et commenter le résultat obtenu.
17. En exploitant à nouveau l'analogie entre orbite circulaire et elliptique, exprimer la durée  $T_H$  du transfert entre l'orbite basse et l'orbite définitive. Faire l'application numérique.
- Pour réduire les coûts associées à la mise en place du système de géolocalisation, on envisage d'autres trajectoire dans le but d'utiliser moins de satellites.
18. Définir ce qu'on appelle un satellite géostationnaire. En déduire dans quel plan il doit nécessairement se situer et en déduire le rayon  $R_{Stat}$  de sa trajectoire. Faire l'application numérique pour le rayon de la trajectoire. Citer une utilisation concrète des satellites géostationnaires.
19. L'utilisation d'orbites géostationnaires est-elle performante pour réaliser un système GPS sur l'ensemble de la surface de la Terre ?

**Problème 3 : Tartine beurrée.**

Une tartine modélisée par un parallélépipède rectangle, homogène, de dimension  $2a$ ,  $2b$  et  $2c$  de centre d'inertie  $C$ , et de masse  $m$  est posée sur le bord d'une table dans la position de la figure 1.

Le moment d'inertie par rapport à l'axe  $Iz$  est donné par :

$$J = m \left( \frac{a^2}{3} + 4 \frac{b^2}{3} + \delta^2 \right)$$

A un instant quelconque de sa rotation sans glissement autour de l'axe  $Iz$ , la position de la tartine est donnée par la figure 2. Dans tous les calculs, on supposera la distance  $\delta$  négligeable devant les dimensions de la tartine.

1. Poser l'étude du mouvement de la tartine lors de cette première phase en précisant proprement le bilan des actions mécaniques.
2. Montrer que l'équation du mouvement de la tartine est donnée par  $J\ddot{\theta} = mgb \sin \theta$
3. En déduire que l'énergie mécanique est une grandeur conservée au cours du mouvement et donner son expression.
4. Montrer alors que la vitesse de rotation s'exprime  $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2mgb}{J}(1 - \cos \theta)}$ .

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2mgb}{J}(1 - \cos \theta)}$$

5. En appliquant la seconde loi de Newton à la tartine, Etablir l'expression des composantes normale  $N$  et tangentielle  $T$  de  $\vec{R} = N\vec{u}_r + T\vec{u}_\theta$  la réaction de la table sur la tartine uniquement en fonction de  $\theta$  et des paramètres  $m$ ,  $b$ ,  $g$  et  $J$ .

On rappelle que la condition de non glissement entre deux solides est donnée par les lois de Coulomb. Il faut respecter la condition  $|T| < f|N|$ . Les dimensions utiles de la tartine sont :  $a = 4,0\text{cm}$  et  $b = 4,0\text{mm}$ .

6. La tartine peut-elle quitter le coin de table sans glisser ?
7. On constate que la tartine commence à glisser pour  $\theta_0 = \pi/4$ . Exprimer puis évaluer numériquement le coefficient de frottement  $f$ .

On suppose qu'à partir du moment où la tartine glisse, elle perd le contact avec la table, et entame une phase de chute libre en conservant la vitesse de rotation acquise dans la première phase.

8. Exprimer la vitesse de rotation  $\Omega$  de la tartine au cours de la chute. Evaluer la numériquement.
9. Etablir l'équation d'évolution de l'altitude  $z(t)$  du centre  $C$  de la tartine lors de la chute libre en négligeant tout frottement de l'air sur celle-ci.
10. Pour une table de hauteur  $h$ , exprimer la durée  $t_C$  de la chute en la confondant avec l'instant où  $C$  atteint l'altitude du sol. Evaluer cette durée numériquement pour  $h = 75\text{cm}$ . Quelle est la chance d'attraper la tartine durant sa chute ?
11. Evaluer numériquement la position angulaire  $\theta_C$  de la tartine lorsqu'elle atteint le sol. Conclure.

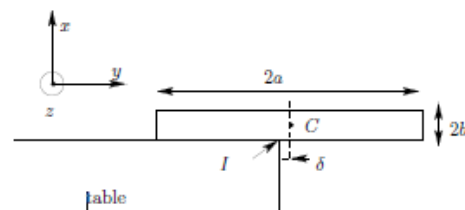


Figure 1.

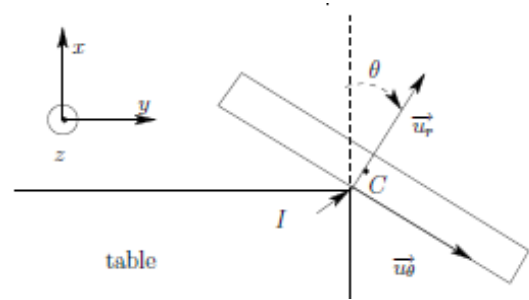


Figure 2.