

Problème 1 : Pilotage d'une platine vinyle.



L'objectif de ce problème est de piloter le moteur d'une platine vinyle afin de respecter le cahier des charges suivant :

- Le temps de réponse à 5% de la platine $t_{5\%}$ doit rester inférieur à 8s.
- La variation δN de la vitesse de rotation autour de la valeur de consigne $N_{nom}=33\text{tours.min}^{-1}$ doit rester inférieure à 2%.

On suppose que la platine présente un moment d'inertie $J=0,1\text{kg.m}^2$ par rapport à l'axe (Oz) vertical autour duquel elle tourne, grâce à une liaison pivot, à la vitesse angulaire notée $\Omega(t)$ dans toute la suite du problème. On suppose également que la platine est équilibrée par rapport à cet axe de rotation.

Au niveau de la liaison pivot, on tiendra compte d'un couple de frottement fluide $C_f=-\mu\Omega$ où le coefficient de frottement prend la valeur $\mu=2.10^{-2}\text{N.m.rad}^{-1}.s$ et d'un couple de frottement solide de valeur absolue $C_s=0,4\text{N.m}$.

A. Première solution de pilotage.

Afin de mettre en rotation la platine, un moteur applique un échelon de couple $C_p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ C_o & \text{si } t > 0 \end{cases}$ dans le but d'atteindre la vitesse de rotation nominale Ω_{nom} lorsque le régime est

établi. La pointe de la tête de lecture est « en l'air » et ne touche pas le disque.

1. Faire le bilan des actions mécaniques sur la platine.
2. Déterminer alors l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de rotation sur l'intervalle $t \in [0; +\infty[$ et faire apparaître un temps caractéristique τ . Préciser également Ω_∞ la vitesse atteinte en régime stationnaire.
3. Indiquer la condition initiale vérifiée par la vitesse de rotation puis déterminer l'expression de la vitesse $\Omega(t)$. Faire une représentation graphique.
4. Exprimer Ω_∞ en fonction de N_{nom} et en déduire l'expression de C_{nom} permettant d'atteindre la vitesse de consigne. Faire l'application numérique.
5. Déterminer l'instant $t_{5\%}$ à partir duquel la vitesse de rotation reste égale à la vitesse de consigne à 5% près et faire l'application numérique. Commenter.

B. Seconde solution de pilotage.

Afin d'améliorer le temps de réponse, on se propose d'imposer un couple $C_{dem}=0,62\text{N.m}$ pendant une durée t_{dem} égale à deux secondes puis de revenir à la valeur C_{nom} déterminée précédemment.

6. En vous appuyant sur les résultats de la partie A, et en les adaptant, déterminer l'expression de $\Omega(t)$ sur l'intervalle $t \in [0, t_{dem} = 2s]$. En déduire l'expression de la vitesse de rotation Ω_{dem} atteinte à la fin de cette phase et faire l'application numérique.
7. Déterminer l'expression de la vitesse de rotation $\Omega(t)$ sur l'intervalle $t \in [t_{dem} = 2s, +\infty[$ en fonction de Ω_{dem} , Ω_∞ , t_{dem} et τ . En déduire l'expression du temps de réponse à 5% dans cette nouvelle configuration. Faire l'application numérique et commenter.



C. Contrôle de la vitesse de rotation.

Un système de stroboscope à fréquence fixe égale à $f_{str}=60\text{Hz}$ éclaire un bandeau sur lequel des points métalliques sur fond noir sont disposés régulièrement sur le pourtour de la platine.

8. Rappeler le principe du fonctionnement d'un éclairage stroboscopique et expliquer comment il permet de contrôler le respect de la vitesse de consigne $N_{nom}=33\text{tours}$.

9. Exprimer et évaluer numériquement le nombre de points métalliques qu'il faut disposer sur le pourtour de la platine pour mettre en œuvre le contrôle par stroboscopie de la vitesse de rotation et l'évaluer pour les disques en 33 tours/min.

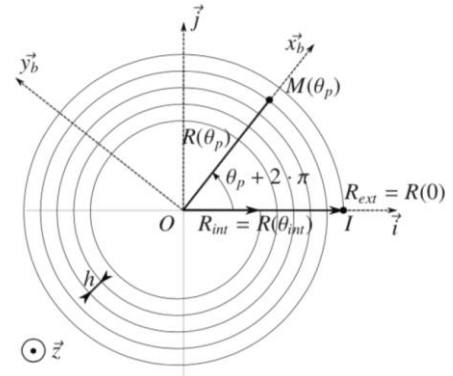
D. Pilotage du moteur pendant la lecture.

La lecture commence pour une durée de 30 minutes dans le cas du disque vinyle étudié, la pointe de la tête de lecture est alors posée sur le disque, elle suit le microsillon gravé sur le disque en forme de spirale d'Archimède.

10. Evaluer le nombre n_{tot} de tours effectués par le disque durant la lecture.

La spirale d'Archimède conduit à une équation polaire de la forme $R(\theta_p) = -a\theta_p + b$ selon la configuration montrée sur la figure ci-contre où la distance entre deux sillons a été volontairement augmentée afin d'améliorer la visibilité.

Lorsqu'on pose la tête de lecture sur le disque à l'instant $t=0$, on définit le repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) lié au disque, où O est le centre du disque et I le point de contact de la tête, tel que $\vec{OI} = R_{ex} \cdot \vec{i}$. Le repère $R_b (O, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z})$ est associé au bâti. Ainsi, selon ce modèle, tout se passe comme si la tête de lecture tournait autour du disque immobile.



Le rayon extérieur du disque est $R_{ext}=150\text{mm}$, le rayon intérieur est $R_{int}=75\text{mm}$. On prend comme conditions initiales $\theta_p(t=0)=0$; $R(t=0)=R_{ext}$.

11. Exprimer et évaluer numériquement θ_{max} (en radian) tel que $R(\theta_{max})=R_{int}$.

12. Exprimer a et b en fonction de R_{ext} , R_{int} et θ_{max} . Exprimer et évaluer numériquement le pas h de la spirale d'Archimède, c'est-à-dire la distance entre deux sillons successifs.

La composante verticale de l'action mécanique de la tête sur le disque est appelée P_{tete} , elle est réglée à l'aide d'un contrepoids placé sur le bras de manière à ce que $P_{tete}=3.0 \cdot 10^{-2}\text{N}$. Le coefficient de frottement entre le vinyle et le diamant est noté $f_d=0,3$. Ainsi la pointe exerce une force de composante horizontale \vec{F}_p , liée aux frottements au niveau du point de contact avec le vinyle. On fera l'hypothèse que cette force est perpendiculaire au rayon \vec{OM} .

13. Déterminer l'expression littérale de la force $\vec{F}_p = F_p \vec{u}$ en fonction de f_d , P_{tete} et préciser la direction et le sens du vecteur unitaire \vec{u} .

On considère d'abord que le couple moteur $C_p(t)$ est constant tout au long de la lecture de la piste, comme dans les parties précédentes. On prend comme conditions initiales une position angulaire nulle $\theta_p(t)=0$ et une vitesse angulaire nulle $\omega_p(t)=0$.

14. Appliquer le théorème du moment cinétique au plateau sur l'ensemble du mouvement et montrer que l'équation régissant l'évolution de l'angle $\theta_p(t)$ s'écrit :

$$J \frac{d^2\theta_p}{dt^2} + \mu \frac{d\theta_p}{dt} - F_p a \theta_p = C_p - C_s - R_{ext} F_p$$

15. Etablir l'expression de $S_H(t)$ la solution générale de l'équation homogène.

On introduira $\Delta = \mu^2 + 4JF_p a$.

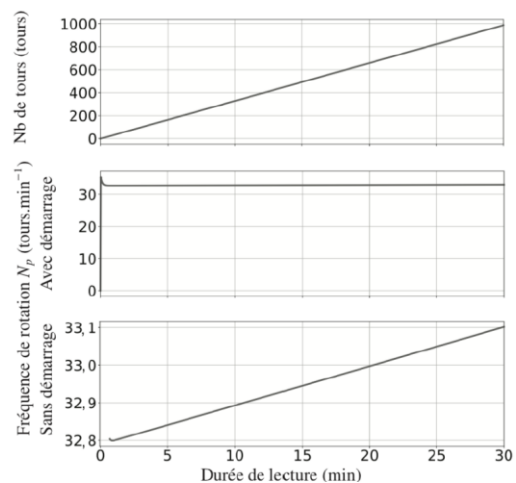
16. Donner l'expression de S_p la solution particulière de l'équation complète.

17. Donner alors la solution générale de l'équation sans chercher à déterminer les constantes qui y apparaissent

La résolution complète du problème nécessiterait de prendre en compte la variation du couple moteur C_p étudié dans la seconde solution de pilotage. Afin d'éviter de surcharger les calculs, cette résolution a été réalisée à l'aide d'un calcul numérique dont les résultats sont présentés ci contre.

18. Expliquer la tendance de la courbe (sans démarrage) de la fréquence de rotation sur l'intervalle de temps $t \in [1, 30] \text{min}$

19. Montrer que sur l'intervalle de temps considéré précédemment, on peut considérer que $\omega_p(t)$ respecte le cahier des charges. Conclure quant à la nécessité d'asservir la vitesse de rotation du disque si celle-ci a été bien réglée dès le départ.



Problème 2 : le projet Hyperloop.

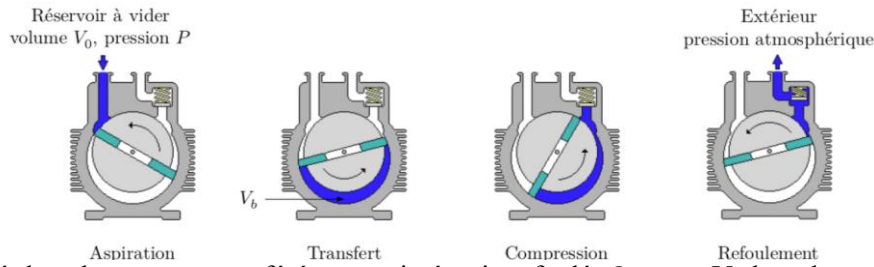
Le projet de transport en commun Hyperloop a été proposé en 2013. Son principe est de transporter des passagers à haute vitesse dans les capsules placées à l'intérieur d'un tube partiellement vidé pour réduire les frottements. Ce projet étudie la possibilité de relier Los Angeles à San Francisco, villes distantes d'environ 600km, en limitant la durée du trajet à 35 minutes. Les passagers sont transportés dans des capsules, propulsées par un moteur à induction, qui se déplacent sur coussin d'air dans un tube à pression réduite. Les capsules sont équipées d'un compresseur utilisé pour produire le coussin d'air et une force de poussée additionnelle.

Le tube de volume V , a une longueur $L=600\text{km}$, et un diamètre intérieur $d=2,23\text{m}$. Initialement, il est rempli d'air à la pression atmosphérique P_0 . Pour abaisser la pression intérieure, on prévoit d'utiliser des pompes à palettes.

A. Fonctionnement d'une pompe à palette.

Une pompe à palette simple étage est constituée de la manière suivante :

- Un stator cylindrique creux muni d'un orifice d'aspiration et d'un orifice de refoulement équipé d'une soupape qui ne peut se soulever pour libérer l'air que si la pression sous celui-ci atteint la pression atmosphérique.
- Un rotor excentré par rapport au stator afin de modifier le volume offert au fluide lors de la phase de compression.
- De deux palettes coulissantes installées dans le rotor, plaquées sur la surface intérieure du stator par des ressorts (non représentés) et par la force centrifuge.



L'air est aspiré dans la pompe, transféré, comprimé puis refoulé. On note V_b le volume d'air aspiré, à la pression P du réservoir à vider de volume V_0 . L'air est considéré comme un gaz parfait, de température T . Ses évolutions lors de l'aspiration et du transfert se font à température constante.

On admet, pour l'instant, qu'il n'y a aucun espace libre entre la soupape de refoulement et l'orifice d'aspiration, et donc pas de fluide résiduel subsistant dans la pompe entre la phase de refoulement et la phase d'aspiration suivante. Initialement, la pression dans le réservoir à vider est égale à la pression atmosphérique P_0 . On considère qu'après n cycles de la pompe, la pression a atteint la valeur P_n .

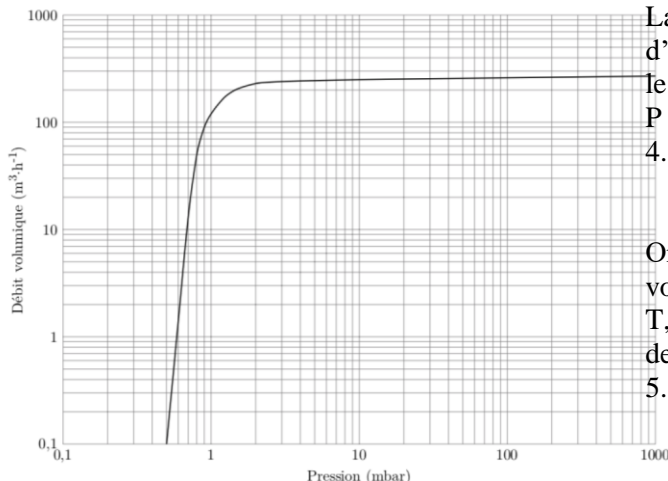
1. Montrer la relation de récurrence liant P_{n+1} et P_n $P_{n+1} = \frac{V_0}{V_0 + V_b} P_n$. En déduire l'expression de la

pression en fonction de P_0 , V_0 , V_b et n .

2. Quelle est la pression minimale P_{\min} qu'on peut alors atteindre en théorie dans le réservoir ?

Le débit volumique D d'une pompe est défini comme le volume aspiré à la pression du réservoir par unité de temps. On note v le nombre de cycles d'aspiration par unité de temps.

3. Exprimer le débit volumique en fonction de v et V_b . Dépend-t-il de la pression dans le réservoir ?



La figure ci-dessous présente la caractéristique d'une pompe à palette à gros débit, c'est à dire le débit volumique D en fonction de la pression P dans le réservoir.

4. Sur quelle plage de pression la modélisation précédente permet-elle de rendre compte de cette caractéristique ?

On fait maintenant l'hypothèse qu'un certain volume V_h , à la pression P_0 et à la température T , est refoulé dans le réservoir à chaque cycle de fonctionnement de la pompe.

5. Exprimer la variation de la quantité de matière dans le réservoir sur un cycle.

physique

6. En déduire l'expression du débit de la pompe en fonction de v , V_b , V_h , P_o et la pression dans le réservoir notée P . Montrer que la courbe de débit est mieux décrite avec ce modèle.
7. Montrer que la nouvelle relation de récurrence vérifiée par la pression est $P_{n+1} = P_n \frac{V_o}{(V_o + V_b)} + P_o \frac{V_h}{(V_o + V_b)}$. Quelle est alors la pression minimale P_{\min} qu'on peut obtenir dans le réservoir ?

B. Faire le vide.

On installe N pompes identiques placées tous les deux kilomètres du trajet. La caractéristique $D=f(P)$ de ces pompes est celle présentée précédemment. On souhaite évaluer le temps nécessaire pour atteindre une pression finale $P_f=2\text{mbar}$ dans le tube du projet Hyperloop à partir d'une pression initiale égale à la pression atmosphérique.

8. Justifier que la modélisation la plus simple du fonctionnement de la pompe est valide pour l'étude de la mise à faible pression du système hyperloop. En déduire l'expression du débit volumique total D_t des N pompes en fonction de v , N et V_b .
9. Déterminer alors la pression P_{kN} dans le tube à la fin du $k^{\text{ième}}$ tour du système de pompage en fonction de P_o , V , V_b , k et N .
10. Exprimer Δt la durée de pompage correspondant à k cycles en fonction de k , v .
11. En considérant que $(N.V_b) \ll V$, montrer que $\ln\left(\frac{P_f}{P_o}\right) \approx -\frac{ND\Delta t}{V}$.
12. Exprimer le volume V du tube hyperloop, et évaluer le numériquement. Evaluer numériquement le nombre N de pompes. Evaluer le débit volumique de la pompe à partir de la courbe. Evaluer alors numériquement le temps Δt nécessaire pour atteindre la pression P_f . Commenter.

C. Déplacer l'air restant.

Compte tenu de l'espace occupé par les capsules dans le tube et malgré la faible pression, à la vitesse de déplacement souhaitée, il se forme en avant de la capsule un coussin d'air produisant une force de pression importante. Il est donc prévu de disposer un compresseur à l'avant de la capsule afin de transporter l'air vers l'arrière. Ce dispositif réduit le frottement, apporte une force de poussée supplémentaire et permet de générer un coussin d'air pour assurer la sustentation de la capsule.

Le premier principe de la thermodynamique pour une machine ouverte admettant en entrée un fluide d'enthalpie massique h_E et refoulant en sortie un fluide d'enthalpie massique h_S s'écrit sous la forme suivante $h_S - h_E = w + q$ où w est le travail massique fourni au fluide et q est le transfert thermique massique fourni au fluide à la traversée de cette machine.

13. On suppose que ce compresseur fonctionne de manière adiabatique : donner la signification de ce terme et indiquer quel terme s'annule dans le premier principe précédemment donné.
14. Donner l'expression de la variation d'enthalpie massique de l'air à la traversée du compresseur en fonction de γ , le rapport des capacités thermiques à pression constant et à volume constant, R la constante gaz parfait, M_{air} la masse molaire de l'air et les températures T_E et T_S .
15. Dans le tube, l'air à la température $T_E=292\text{K}$ et sous la pression $P_E=100\text{Pa}$ avant d'entrer dans le compresseur. Exprimer la masse volumique ρ_{air} de l'air dans ces conditions.

On considère que la surface d'entrée du compresseur est de forme circulaire de rayon $R_C=63\text{cm}$, que la vitesse de la capsule est $v=1,2.10^3\text{km.h}^{-1}$ et que l'écoulement est uniforme sur la surface d'entrée du compresseur.

16. Exprimer le débit massique D_m d'air entrant dans le compresseur en fonction de ρ_{air} , R_C et v .
17. A partir du travail massique fourni au fluide w et du débit massique du fluide D_m , exprimer la puissance P_{meca} fourni par le compresseur au fluide par une analyse dimensionnelle.
18. Exploiter alors le premier principe pour montrer que $P_{\text{meca}} = \pi R_C^2 v P_E \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \left(\frac{T_S}{T_E} - 1 \right)$
19. Le document de présentation d'Hyperloop indique que le compresseur fournira une puissance mécanique de 328kW à l'air. Déterminer l'expression de la température T_S en sortie du compresseur. Faire l'application numérique pour $\gamma=1,35$.
20. En faisant l'hypothèse supplémentaire que le compresseur fonctionne de manière quasi-statique, en déduire une évaluation numérique de la pression P_S en sortie du compresseur. Commenter.

D. Fuite d'air de la capsule dans le tube.

Un échangeur assure que la capsule où sont assis les voyageurs est maintenue à une température ambiante de $T_0=25^\circ\text{C}$. Cette capsule de volume $V_c=5\text{m}^3$ contient un mélange de gaz parfaits dont la composition est approximée par 20% de dioxygène et 80% de diazote dont les masses molaires respectives sont $M(\text{O}_2)=32\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $M(\text{N}_2)=28\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$. On rappelle que la constante des gaz parfaits est $R=8,314\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$. La pression totale dans la capsule est égale à la pression atmosphérique P_0 .

21. Déterminer l'expression de la vitesse quadratique moyenne $u(\text{O}_2)$ de O_2 dans la capsule. Evaluer la numériquement.
 22. Déterminer l'expression et calculer la pression partielle $P(\text{O}_2)$ en O_2 dans la capsule.
 23. Déterminer l'expression et calculer le nombre de molécule $N(\text{O}_2)$ de O_2 dans la capsule.
- On modélise une fuite de gaz de la capsule vers le tube hyperloop en considérant qu'un petit trou de section s apparaît dans la coque de la capsule. On suppose que la distribution des vitesses des molécules de O_2 dans la capsule est homogène et isotrope, et qu'elles présentent toute la même vitesse égale à la vitesse quadratique moyenne $u(\text{O}_2)$, on note $N_0=N(\text{O}_2)(t=0)$ à l'instant initial.
24. En détaillant proprement le bilan de molécules sortant de la capsule sur une durée élémentaire δt , montrer que le nombre de molécules de O_2 dans la capsule vérifie l'équation différentielle suivante $\frac{dN(\text{O}_2)}{dt} + \frac{su}{6V_c} N(\text{O}_2) = 0$.
 25. Quel est le temps caractéristique $\tau(\text{O}_2)$ d'évolution de $N(\text{O}_2)$?
 26. Exprimer la pression partielle en O_2 dans la capsule au cours du temps.
 27. Quelle est l'évolution du rapport des pressions partielles en O_2 et en N_2 dans la capsule en fonction du temps ? Commenter.

Problème 3 : stockage du CO_2 .**a. Exploitation du diagramme (P,T).**

Les activités humaines ont accru sensiblement la concentration en CO_2 de l'atmosphère terrestre, autour de 280ppm il y a 250 ans, il est actuellement de 387ppm (soit une augmentation de 38%).

Afin de ne pas dépasser la limite de 450 ppm au-delà de laquelle les conséquences le plus dramatiques du réchauffement climatique seront inévitables, de nombreuses options sont envisagées afin de limiter le rejet de CO_2 dans l'atmosphère.

Une proposition, discutable dans l'état d'esprit et dans la forme, consiste à former des blocs de CO_2 solide à l'aide d'installations frigorifiques puis de les laisser tomber dans des fosses marines.

Pour l'océan, on fournit les données suivantes : température $T_0=280\text{K}$, masse volumique $\rho_0=1,03\cdot 10^3\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Pour le CO_2 , on fournit le diagramme des phases présenté dans l'**annexe 1**.

1. Compléter le diagramme fourni en annexe 1 en précisant l'état physique stable pour le CO_2 dans les domaines (1), (2) (3) et (4).
2. Nommer les points (c) et (b) et préciser leur particularité.
3. Est-il envisageable d'observer une transition de phase vapeur→liquide à la température de $T_0=280\text{K}$? Si oui, déterminer une valeur numérique de la pression de vapeur saturante du CO_2 à la température T_0 .
4. A quelle pression observe-t-on la solidification du CO_2 à la température de 280K ?

On fournit la loi donnant l'évolution de la pression dans les océans en fonction de la profondeur z :

$$P(z) = P_0 + \rho_0 g z \quad \text{où } P_0=1\text{bar à la surface et } g=9,81\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \text{ est l'accélération de la pesanteur.}$$

5. Déterminer la profondeur minimale à laquelle doit être effectué le stockage du CO_2 pour qu'il reste sous forme solide. Faire l'application numérique. Commenter le résultat obtenu.

b. Exploitation du diagramme (P,v).

Le diagramme de Clapeyron du dioxyde de carbone est donné en **annexe 2**, on y a représenté les isothermes dites d'Andrews pour les températures 235K, 250K, 265K, 280K, 310K, 325K, 340K.

On fournit également les données suivantes :

Constante des gaz parfaits : $R=8,31\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$, Masse molaire de CO_2 : $M=44,0\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

physique

Données thermodynamiques pour les phases liquide saturant et vapeur saturante pour le CO₂ :

T(K)	235	250	265	280	295
P _{sat} (Bar)	10,7	18	28,1	41,9	59,5
v _L (m ³ .kg ⁻¹)	9,0.10 ⁻⁴	9,6.10 ⁻⁴	1,0.10 ⁻³	1,1.10 ⁻³	1,3.10 ⁻³
v _V (m ³ .kg ⁻¹)	3,6.10 ⁻²	2,1.10 ⁻²	1,3.10 ⁻²	8,1.10 ⁻³	4,7.10 ⁻³
h _L (kJ.kg ⁻¹)	113	144	177	213	256
h _V (kJ.kg ⁻¹)	435	437	435	427	408

- Placer sur le diagramme fourni en annexe le point critique C, identifier alors clairement la courbe de rosée et la courbe d'ébullition. Préciser l'état du système dans les différents domaines.
- Indiquer sur chaque isotherme la température correspondante.
- Vérifier pour la température T=280K la cohérence entre le diagramme (P,v) et le diagramme (P,T).
- En justifiant au préalable votre démarche, rajouter au diagramme l'isotherme T=295K.
- En appliquant un modèle de gaz parfait au dioxyde de carbone, déterminer le volume massique de la phase vapeur saturant à T=295K. Comparer alors à la valeur tabulée et commenter le résultat obtenu.

Une masse m₀=18,0kg de CO₂ initialement en phase vapeur (sèche) est soumise à une compression isotherme qui l'amène dans un état (II) d'équilibre liquide vapeur correspondant à la situation de stockage dans une bouteille de volume fixe 54L. On envisage ensuite une surchauffe accidentelle du local de stockage qui l'amène dans l'état (III).

	Etat (I)	Etat (II)	Etat (III)
Température (K)	280	280	310
Volume	270L	54L	54L

- Placer sur le diagramme les points représentatifs des états (I), (II) et (III), en déduire l'état physique dans lequel se trouve le CO₂ dans chaque cas.
- Pour l'état (II) déterminer la composition du système en exprimant puis en évaluant numériquement les masses de CO₂ m_L en phase liquide et m_G en phase vapeur.
- Evaluer numériquement H_(II) l'enthalpie puis U_(II) l'énergie interne du système dans l'état (II).

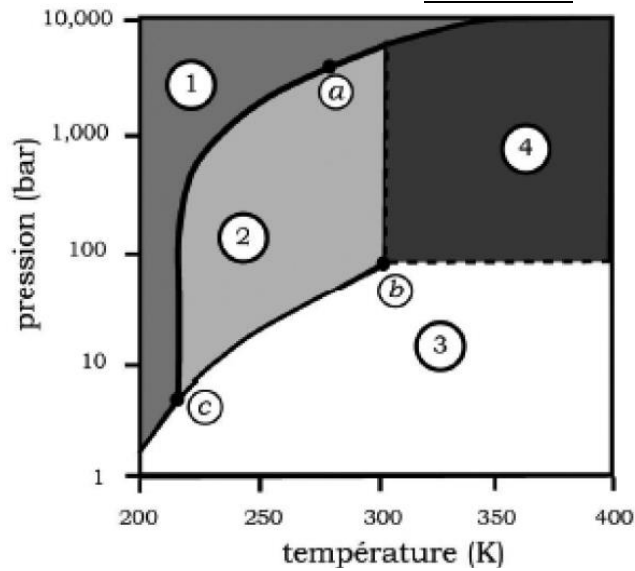
Pour évaluer l'enthalpie du système dans les états (I) et (III), on exploite le modèle de gaz de Van der Waals qui se traduit par :

- l'équation d'état $\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = \frac{RT}{M}$ avec a=1,88.10² USI et b=9,70.10⁻⁴USI.
 - l'expression de l'énergie interne massique de la forme $u = c_v T - \frac{a}{v} + u_0$ avec c_v=6,48.10²J.K⁻¹.kg⁻¹ et u₀=2,35.10²kJ.kg⁻¹.
- Rappeler l'équation d'état du gaz parfait et en déduire l'approximation qui est faite. Déterminer alors l'expression de l'énergie interne molaire pour le gaz parfait à partir de celle donnée pour le gaz de Van der Waals.
 - Evaluer numériquement l'énergie interne du système dans l'état (I) et dans l'état (III) avec le modèle de Van der Waals et avec un modèle de gaz parfait. Commenter les résultats obtenus.
 - Déterminer le transfert thermique à fournir au système pour effectuer la transformation de (II) vers (III) en exploitant les résultats des questions 13 et 15.

NOM :

Prénom :

ANNEXE 1 :



Caractéristiques des points a, b et c

point a : $T_a = 280 \text{ K}$;
 $P_a = 4 \times 10^3 \text{ bar}$

point b : $T_b = 304 \text{ K}$;
 $P_b = 70,4 \text{ bar}$

point c : $T_c = 216 \text{ K}$;
 $P_c = 5,11 \text{ bar}$

ANNEXE 2 :

