

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

**Les candidats sont invités à encadrer les réponses finales aux questions posées.**

**L'usage de calculatrices est autorisé.**

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**Problème 1 : Etude de deux installations industrielles.**

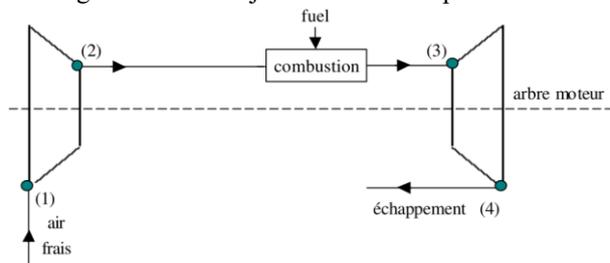
**A. Etude d'une turbine à gaz parfait.**

Une installation industrielle utilise une turbine à gaz qui fournit une puissance utile  $P_u=1,0\text{MW}$ .

L'énergie est fournie par combustion d'un fuel dont le pouvoir énergétique est  $q_{\text{fuel}}=40\text{MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

Le fluide utilisé est l'air, qui subit les transformations suivantes (figure ci-dessous) :

- aspiration d'air atmosphérique dans l'état (1) :  $p_1=1,0\text{bar}$ ,  $T_1=288\text{K}$  ;
- compression qui amène l'air à l'état (2) :  $p_2$ ,  $T_2$  ;
- combustion interne isobare : le combustible est mélangé à l'air et brûlé dans une chambre de combustion, ce qui amène le gaz dans l'état (3) :  $p_2$ ,  $T_3$  ; Compte tenu de l'excès d'air, on considère que la quantité et les propriétés du gaz ne sont pratiquement pas modifiées par cette transformation ;
- détente dans une turbine jusqu'à l'état (4) :  $p_1$ ,  $T_4$ .
- les gaz sont alors rejetés dans l'atmosphère.



Les contraintes technologiques imposent de ne pas dépasser  $700^\circ\text{C}$  à l'entrée de la turbine. Dans tout le problème, on prendra  $T_3=950\text{K}$ .

Le gaz circulant sera assimilé à un gaz parfait de masse molaire  $M = 29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$  (celle de l'air) et de coefficient moyen  $\gamma=C_p/C_v=1,36$ . La constante des gaz parfait est  $R=8,314\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

**Ordre de grandeur (question à rédiger consciencieusement).**

La combustion d'un kilogramme de fuel rejette 3 kg de dioxyde de carbone. On estime a priori que le rendement  $r$  de l'installation pourra être voisin de 0,5.

1. Calculer, par heure de fonctionnement, la masse de fuel brûlé et la masse de dioxyde de carbone rejeté dans l'atmosphère.

**Cycle de Brayton.**

En fonctionnement stationnaire, le débit du gaz circulant dans le dispositif par unité de temps est constant, puisque l'échappement en sortie de turbine est compensé par l'admission d'air frais à l'entrée du compresseur. Du point de vue thermodynamique, on peut faire l'hypothèse que le gaz sortant de la turbine se refroidit de manière isobare jusqu'à l'état (1) pour décrire à nouveau les transformations précédentes. Toutes les transformations subies par le gaz parfait seront considérées réversibles.

2. On considère que la compression et la détente sont adiabatiques : préciser les conditions pratiques d'adiabaticité. Démontrer et nommer la relation existant alors entre la pression  $p$  et le volume massique  $v$  pour le gaz parfait au cours de ces transformations.
3. Représenter l'allure du cycle en coordonnées de Clapeyron  $p=f(v)$ , après avoir explicité les équations des quatre courbes constitutives du cycle. Commenter le sens de parcours du cycle.

**Rendement théorique.**

Dans la suite, on notera  $q_{ij}$  les transferts thermiques massiques associés aux transformations d'un état (i) à un état (j), et  $w$  le travail massique total sur le cycle, ces grandeurs étant considérées reçues par le gaz.

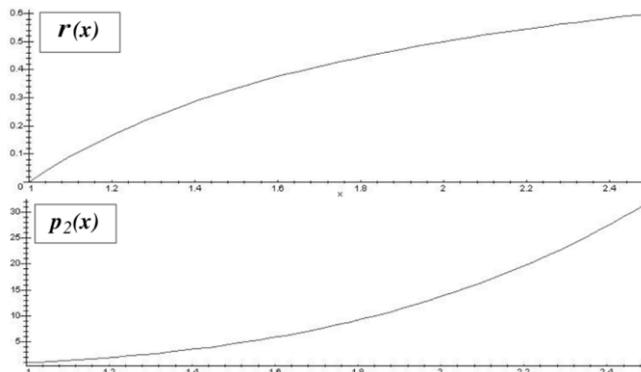
4. Exprimer puis calculer la valeur numérique de la capacité thermique massique  $c_p$  de l'air.
5. Exprimer  $T_2$  et  $T_4$  en fonction de  $T_1$ ,  $T_3$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  et  $\gamma$ . On définit  $x$  tel que  $T_2 = xT_1$  ; exprimer  $T_4$  en fonction de  $x$  et  $T_3$  et préciser l'expression de  $x$  en fonction de  $p_1$ ,  $p_2$  et  $\gamma$ .
6. Exprimer le travail massique  $w$  reçu par le fluide au cours du cycle entier, d'abord en fonction de  $c_p$  et des températures  $T_k$ , puis en fonction de  $c_p$ ,  $x$ ,  $T_1$  et  $T_3$ .

7. Montrer que le travail utile récupérable ( $-w$ ) passe par un maximum pour  $x = x_m = \sqrt{\frac{T_3}{T_1}}$  et s'exprime

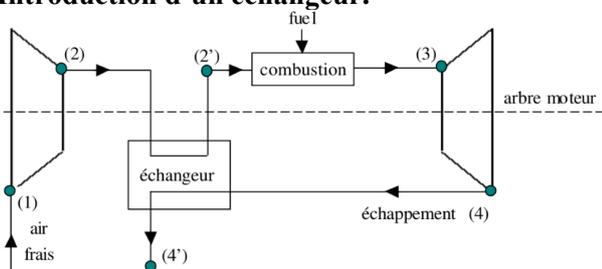
alors  $(-w_m) = c_p (T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1 T_3})$ . Faire les applications numériques.

8. En déduire les valeurs numériques de  $p_2$ ,  $T_2$  et  $T_4$  pour  $x = x_m$ .

9. Calculer de même numériquement le transfert thermique massique  $q_{23}$  reçu par le gaz dans la chambre de combustion, puis le rendement  $r_m$  de l'installation lorsque  $x = x_m$ .
10. Exprimer la puissance utile fournie  $P_u$  en fonction du travail utile  $w$  et du débit massique  $D_m$ . Quelle est la conséquence d'une diminution du travail utile (en valeur absolue) sur la vitesse de rotation de la turbine, si l'on souhaite maintenir une puissance utile fournie de  $P_u = 1,0\text{MW}$  ?
11. À l'aide des courbes  $r(x)$  et  $p_2(x)$  fournies ci-dessous, expliquer pourquoi on n'a pas cherché à obtenir un meilleur rendement que  $r_m$  ?



**Introduction d'un échangeur.**



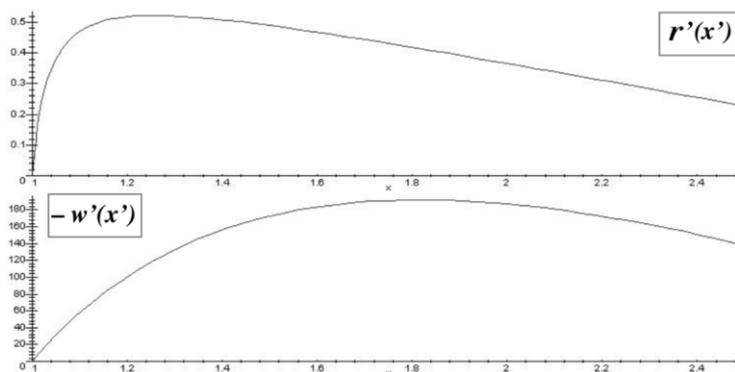
L'installation de la figure ci-contre montre un échangeur qui réchauffe les gaz frais entre le compresseur et la chambre d'admission, par un transfert thermique avec les gaz d'échappement. L'échangeur est isobare (pour chacun des gaz) et parfaitement calorifugé.

12. Exploiter le caractère stationnaire du fonctionnement du système pour établir que  $(T_2' - T_2) + (T_4' - T_4) = 0$  et que  $q_{22'} + q_{44'} = 0$ .

On rappelle que toutes les transformations sont supposées réversibles et que l'entropie massique d'un gaz parfait peut être exprimée par la relation

$$s(T, P) = s(T_0, P_0) + \frac{R}{M} \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) - \ln \left( \frac{P}{P_0} \right) \right)$$

13. Montrer que les températures dans l'échangeur vérifient la relation  $T_2' T_4' = T_2 T_4$ .
14. En déduire finalement qu'il faut que  $T_2' = T_4$  et que  $T_4' = T_2$ .
15. Déterminer l'expression du travail utile  $w'$  et du rendement  $r'$  en des températures  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$ .
16. Par des calculs analogues à ceux de la partie précédente, exprimer le travail utile récupérable  $-w'$  et le rendement  $r'$  en fonction des températures imposées et du paramètre  $x'$  tel que  $T_2 = x' T_1$  ( $x'$  est défini de la même façon que  $x$  précédemment, mais n'aura pas la même valeur numérique).
17. Commenter le choix d'une valeur de  $x'$  à l'aide des courbes  $-w'(x')$  et  $r'(x')$  présentées ci-dessous.
18. On choisit  $x'$  tel que  $r'$  soit maximal (valeurs à lire sur la courbe). Estimer, en pourcentage, la diminution de la consommation et donc du rejet horaire de dioxyde de carbone, en considérant toujours une puissance utile fixée à  $P_u = 1,0\text{MW}$ .



**B. Etude d'une machine à vapeur d'eau.**

On rappelle le premier principe industriel entre le point d'entrée (e) et le point de sortie (s) d'un élément actif d'une machine thermodynamique :  $h_s - h_e = w + q$  où  $w$  est le travail massique utile reçu et  $q$  est le transfert thermique massique reçu par le fluide lors de la traversée.

Le problème présente l'étude d'un site de co-production électrique et de distribution de chaleur. On donne la masse volumique  $\rho_{\text{eau}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et la capacité thermique massique  $c_{\text{eau}} = 4,8 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  de l'eau liquide.

L'incinérateur brûle des déchets avec un apport de méthane et des entrées d'air frais. Le dioxyde de carbone, la vapeur et les particules sortantes de l'incinérateur de déchets sont récupérées pour le chauffage des éléments d'une chaudière. Cette dernière permet d'obtenir de la vapeur sous haute pression destinée à entraîner un turboalternateur d'une part et à alimenter un réseau urbain de chaleur d'autre part. La puissance thermique de la chaudière est de  $P_{\text{th}} = 20 \text{ MW}$  ce qui correspond à un débit massique  $D = 17 \text{ tonnes/h}$  de vapeur à  $375^\circ\text{C}$  sous 40bars. L'énergie envoyée vers le chauffage urbain est de 72GWh par an. Le turbo-alternateur est d'une puissance électrique de 3,6MW et permet une production électrique de 30GWh par an.

**Description du cycle de la machine à vapeur d'eau.**

- L'eau est injectée dans l'état A, sous forme liquide à la température de  $25^\circ\text{C}$  sous la pression  $P_A = 1 \text{ bar}$ .
- Elle traverse un compresseur adiabatique et réversible à la sortie duquel elle atteint l'état B de pression  $P_B = 40 \text{ bars}$ .
- Elle traverse trois composants dans lesquels elle subit des transformations isobares sans recevoir de travail mécanique autre que celui du transvasement :
  - ✓ Un économiseur à la sortie duquel on atteint l'état C, liquide saturant.
  - ✓ Un ballon de vaporisation dans lequel le liquide est vaporisé pour atteindre l'état D, vapeur saturante.
  - ✓ Un surchauffeur qui l'amène à l'état E, vapeur sèche surchauffée à la température de  $375^\circ\text{C}$ .
- La vapeur sèche haute pression subit une détente isentropique dans une turbine pour revenir à un mélange liquide-vapeur à la pression  $P_A$  définissant l'état F.
- Ce mélange est alors condensé et refroidi jusqu'à l'état A en suivant un chemin isobare.

La turbine est entraînée mécaniquement par la vapeur haute pression. Cette turbine entraîne un alternateur qui génère de l'électricité. On considère un rendement de 90 % entre la puissance mécanique de la turbine et la puissance électrique générée par l'alternateur.

**Tracé du cycle et résumé des états du système.**

19. Montrer qu'une transformation adiabatique et réversible est une transformation isentropique.

Dans le modèle de la phase condensée indilatable et incompressible, on donne la variation d'entropie  $ds = c_{\text{eau}} \frac{dT}{T}$ .

20. Expliciter les hypothèses de la phase condensée indilatable et incompressible puis déduire qu'une transformation isentropique pour l'eau liquide est une transformation isotherme.
21. Sur le diagramme fourni en annexe A et à partir de la description précédente, représenter le cycle  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow A$ .
22. Compléter alors le tableau fourni en annexe B-1.

**Etude des transferts énergétiques.**

23. Exprimer puis évaluer le transfert thermique massique  $q_{BE}$  reçu par le fluide pour passer de B à E.
24. Exprimer puis évaluer le transfert thermique massique  $q_{FA}$  reçu par le fluide pour passer de F à A.
25. Exprimer puis évaluer le travail massique  $w_{EF}$  reçu par le fluide lors du passage de E à F.
26. Exprimer puis évaluer numériquement le travail massique  $w_{AB}$ . Vérifier que ce travail est négligeable dans le bilan des transferts énergétiques lors du fonctionnement de la machine.
27. Définir, exprimer et évaluer numériquement le rendement  $r_1$  de la machine thermique étudiée en la voyant comme un moteur fournissant du travail mécanique.
28. Exprimer et évaluer numériquement le rendement  $r_{1,\text{elec}}$  du système étudié en considérant maintenant que l'objectif est de fournir un travail électrique.
29. Définir, exprimer et évaluer numériquement le titre massique en vapeur au point F.
30. Exprimer  $s_{BE}^{\text{ech}}$  l'entropie massique échangée par le fluide dans la transformation allant de B en E en supposant que le transfert thermique est échangé avec une source de température constante égale à  $T_E$ .
31. Exprimer  $s_{FA}^{\text{ech}}$  l'entropie massique échangée par le fluide dans la transformation allant de F en A en supposant que le transfert thermique est échangé avec une source de température constante égale à  $T_A$ .
32. Rappeler la variation d'entropie massique du fluide sur un cycle.
33. Déterminer  $s^{\text{cr}}$  l'entropie massique créée sur un cycle en fonction des enthalpies massiques du fluide dans les différents états et des températures  $T_A$  et  $T_E$ . faire l'application numérique et commenter.
34. Déterminer le lien entre le débit massique  $D$  de l'eau dans la machine, le travail massique  $w_{EF}$  et la puissance électrique  $P_{\text{elec}}$  fournie par la centrale. Faire l'A.N et comparer à la puissance annoncée.

**Cogénération dans le système.**

En plus de la puissance électrique fournie, on exploite le transfert thermique au contact de la source froide par l'organisation d'un réseau urbain d'eau chaude.

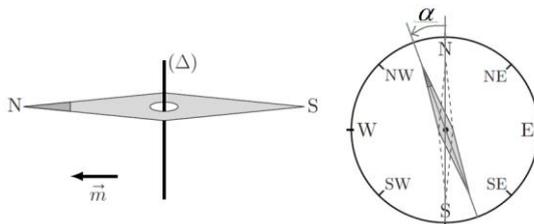
- Exprimer  $E_{th}$  l'énergie thermique récupérable au niveau de la source froide sur une durée  $\Delta t$  d'un an en fonction des enthalpies massiques en F' et en A, du débit massique D de la vapeur d'eau dans la machine et de  $\Delta t$ . Faire l'application numérique et comparer à l'énergie thermique exploitée dans le réseau urbain.

**Problème 2 : Effet du champ magnétique sur un aimant.**

**A. Etude du champ magnétique terrestre à l'aide d'une boussole.**

**Mouvement de l'aiguille de la boussole.**

Une boussole est formée d'un aimant permanent solide en forme d'aiguille porteuse d'un moment magnétique permanent  $\vec{m}$  de norme m. On suppose initialement qu'elle est placée dans un plan horizontal local, en rotation autour de l'axe  $\Delta$  orienté selon la verticale locale. La liaison pivot avec le boîtier qui la contient est supposée parfaite. On note le champ magnétique terrestre local comme la somme d'une composante horizontale et d'une composante verticale  $\vec{B}_T = \vec{B}_H + \vec{B}_V$ .



- Faire le bilan des actions mécaniques sur la boussole en rotation autour de l'axe  $\Delta$ . Préciser les caractéristiques et le nom de l'action mécanique exercée par un champ magnétique  $\vec{B}_T$  sur l'aiguille.

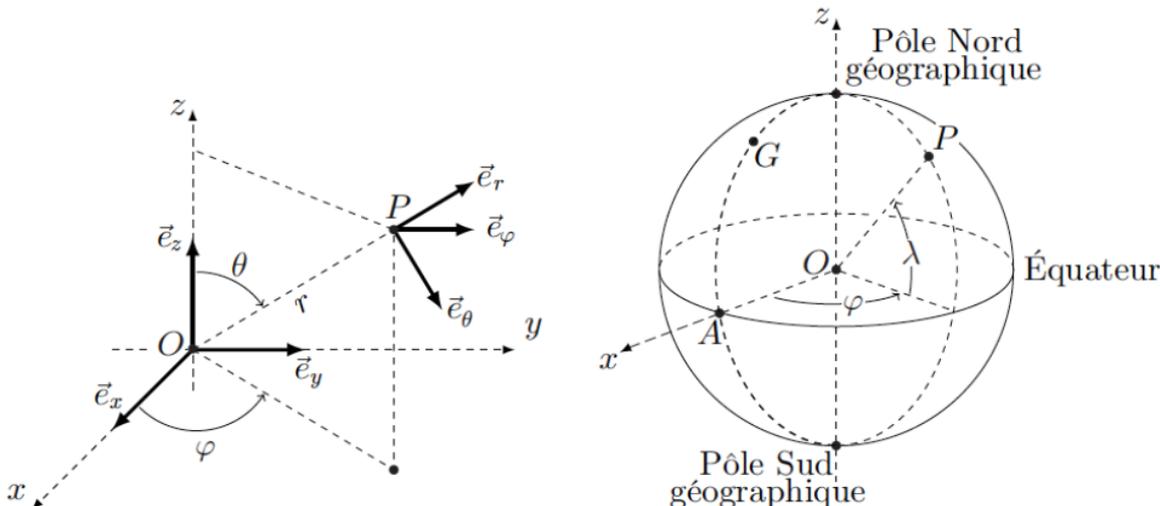
- Montrer que la boussole dans sa position d'équilibre stable indique le « nord magnétique local ».

On repère cette position d'équilibre stable par la position angulaire ( $\alpha=0$ ). On note I le moment d'inertie de l'aiguille aimantée relativement à son axe de rotation  $\Delta$ . On écarte initialement l'aiguille d'un angle  $\alpha_0$  par rapport à la position d'équilibre stable.

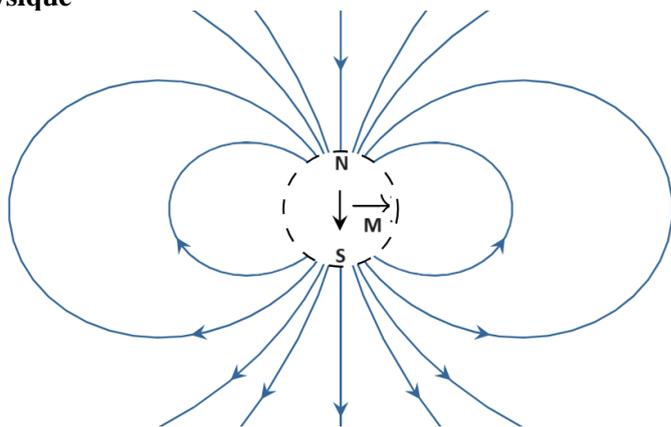
- Appliquer le théorème du moment cinétique à la boussole pour établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle  $\alpha(t)$  :  $I\ddot{\alpha} + mB_H \sin \alpha = 0$ . Quel nom donne-t-on à cette équation ?
- Dans la limite des petits angles, que devient cette équation ? Indiquer alors la période  $T_0$  des petites oscillations de l'aiguille aimantée autour de l'axe  $\Delta$ .

**Application à l'étude du moment magnétique terrestre.**

Les coordonnées sphériques d'un point P sont notées  $(r, \theta, \varphi)$  associées à la base locale  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ . D'autre part, on repère usuellement la position d'un point P à la surface de la Terre à l'aide de la longitude  $\varphi$ , et de la latitude  $\lambda$ , le point de référence A de longitude et latitude nulles étant situé sur le méridien passant par Greenwich (en Angleterre) et sur l'équateur. On confondra ici les pôles magnétiques et les pôles géographiques de la planète Terre.



- Dans la base de projection sphérique indiquer quel vecteur donne la direction verticale locale vers le haut ? Quel vecteur donne la direction locale vers le Nord ?



On considère que la source de champ magnétique Terrestre est modélisée comme un simple dipôle de moment noté ici  $\vec{M}$  à ne pas confondre avec le moment magnétique  $\vec{m}$  de la boussole. On donne la carte de champ magnétique associée sur la figure suivante où N désigne le Nord géographique de la Terre et S le Sud géographique.

6. Reprendre ce schéma et placer la boussole dans sa position d'équilibre stable pour un point P à la surface de la planète Terre situé sur l'équateur puis dans l'hémisphère Nord puis dans l'hémisphère Sud. Dans quelle direction pointe le champ magnétique Terrestre dans l'hémisphère Nord et dans l'hémisphère Sud ? Que se passe-t-il au niveau de l'équateur ?

On se place en un point P situé sur l'équateur, on prend pour aiguille de la boussole un aimant de moment magnétique de norme  $m=2,00A.m^2$ , le solide présente alors un moment d'inertie  $I=7,60.10^{-7}kg.m^2$ . On mesure pour dix périodes d'oscillation de l'aiguille une durée totale de 7,07 secondes.

7. Déduire de cette expérience la norme du champ magnétique terrestre à l'équateur.

Le champ magnétique  $\vec{B}(P)$  généré en P par un moment magnétique  $\vec{M}$  placé en O

s'exprime 
$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\overline{OP})(\vec{M} \cdot \overline{OP}) - (\overline{OP})^2 \vec{M}}{\|\overline{OP}\|^5}$$
 où la perméabilité du vide est  $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} H.m^{-1}$

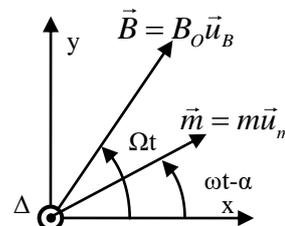
8. En considérant toujours P comme étant à l'équateur, et en introduisant le rayon de la Terre  $R_T=6,37.10^6m$ , simplifier l'expression fournie et en déduire que la norme du moment magnétique de la Terre s'exprime

$$M = \frac{4\pi R_T^3}{\mu_0} \|\vec{B}(P)\| \text{ puis faire l'application numérique.}$$

### B. Etude d'un moteur synchrone.

#### Etude du mouvement du rotor.

On considère toujours un aimant de moment magnétique  $\vec{m}$  comme modélisant le rotor d'un moteur synchrone plongé maintenant dans le champ magnétique tournant généré par le stator de ce moteur, c'est-à-dire un champ magnétique de norme constante  $B_0$  mais dont la direction et le sens tourne à la vitesse angulaire constante  $\Omega$  dans le plan perpendiculaire à  $\Delta$ . On suppose que le moment magnétique  $\vec{m}$  tourne lui aussi dans ce plan à la vitesse angulaire  $\omega$ . On en déduit qu'à un instant t, la configuration pour les deux vecteurs champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_B$  et moment magnétique  $\vec{m} = m \vec{u}_m$  est donnée par la figure ci-contre dans le cas général.



9. Exprimer le moment instantané par rapport à  $\Delta$  exercé par le champ magnétique statorique sur le rotor.  
10. Montrer alors que le couple moyen exercé par le champ magnétique statorique sur le rotor est nul si  $\omega \neq \Omega$ . Expliquer alors le nom donné à ce type de moteur et établir l'expression du moment exercé sur le rotor lorsque  $\omega = \Omega$  en fonction de m,  $B_0$  et  $\alpha$ .

On considère que le moteur permet d'entraîner en rotation une charge exerçant un moment résistant constant de valeur absolue  $\Gamma_C$ . On se place en régime stationnaire à la vitesse de rotation constante  $\Omega$ .

11. Appliquer le théorème du moment cinétique au rotor de moment d'inertie noté I pour établir la relation suivante en régime stationnaire  $mB_0 \sin \alpha - \Gamma_C = 0$ .  
12. Faire une représentation graphique de la fonction  $f(\alpha) = mB_0 \sin \alpha$  sur l'intervalle  $[0, \pi]$ . Montrer alors que le couple de charge entraîné par ce moteur en régime stationnaire ne peut pas dépasser une valeur absolue maximale  $\Gamma_{max}$  à exprimer en fonction de m et  $B_0$ .

On suppose maintenant que  $\Gamma_C < \Gamma_{max}$ .

13. En exploitant à nouveau la représentation graphique précédente, montrer qu'il existe deux valeurs d'angle  $\alpha_1 < \pi/2$  et  $\alpha_2 > \pi/2$  permettant d'obtenir un régime stationnaire pour le moteur synchrone.

On suppose qu'une légère perturbation de la vitesse de rotation du moteur vient diminuer la valeur de l'angle  $\alpha$  à partir de la valeur  $\alpha_1$ .

14. Si  $\alpha$  diminue, qu'est ce que cela signifie pour la vitesse de rotation  $\omega$  ? Qu'est ce que cette perturbation entraine sur le moment total subi par le rotor ? Quelle est alors son influence sur la vitesse de rotation  $\omega$  ? Que peut-on en déduire sur la stabilité du fonctionnement avec l'angle interne du moteur égal à  $\alpha_1$  ?
15. Reprendre le raisonnement et conclure la stabilité du régime stationnaire avec un angle interne du moteur  $\alpha_2$ .

**Etude du stator.**

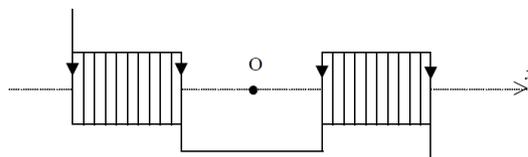
On considère une bobine de longueur  $L$  grande devant son rayon  $a$ , constituée de  $N$  spires jointives enroulées régulièrement sur le cylindre d'axe  $(Ox)$  de la bobine, les spires sont parcourues par un courant  $I(t)$ .

16. Indiquer l'expression du champ magnétique généré à l'intérieur de la bobine en précisant clairement sur un schéma la direction et le sens de ce dernier ainsi que le sens dans lequel le courant  $I(t)$  parcourt les spires de la bobine.

On considère maintenant le système ci-contre où les deux bobines sont parcourues par un courant d'intensité

$$i_1(t) = I_o \cos(\Omega t).$$

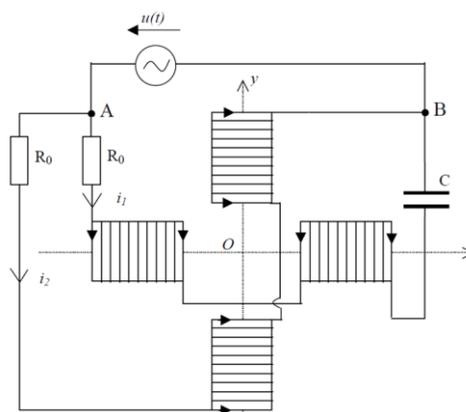
17. Justifier alors que le champ généré par ce système en  $O$  sera de la forme  $\vec{B}_1(t) = B_o \cos(\Omega t) \vec{e}_x$



On place maintenant deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$  dans la configuration suivante dans le but de générer le champ magnétique tournant précédent au voisinage du point  $O$ . Du point de vue électrocinétique, les deux systèmes de bobines sont modélisables de manière identique par l'association d'une résistance  $R=10\Omega$  et d'une inductance propre  $L=0,20H$  en série.

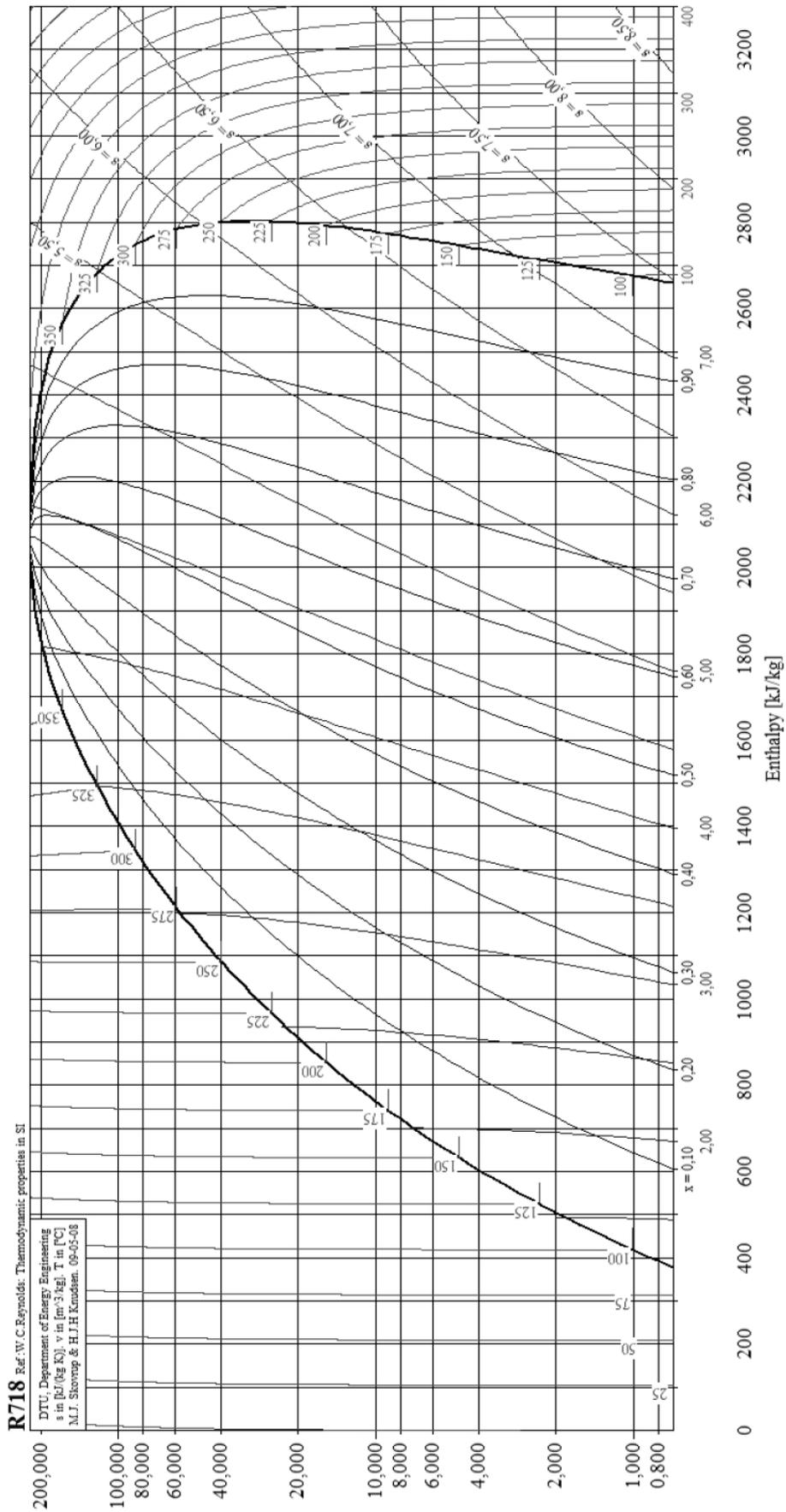
18. Expliquer pourquoi on souhaite obtenir dans le système de bobine numéro 2 une intensité électrique sous la forme

$$i_2(t) = I_o \sin(\Omega t) = I_o \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) ?$$



19. Rappeler la définition d'une impédance complexe et montrer qu'on souhaite ici que les impédances complexes  $\underline{Z}_1$  du circuit 1 et  $\underline{Z}_2$  du circuit 2 soient liées par la relation  $\underline{Z}_2 = j\underline{Z}_1$
20. A l'aide du circuit de la figure, exprimer  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$ .
21. Quelle relation lie alors les modules de ces impédances ? En déduire qu'il faut un condensateur de capacité  $C = \frac{1}{2L\Omega^2}$  pour répondre à cette contrainte.
22. Quelle relation lie alors les arguments de ces impédances ? En déduire qu'il faut que les conducteurs ohmiques introduits présentent une résistance  $R_o = L\Omega - R$ .
23. Rappeler la fréquence du courant électrique délivré par le secteur en France. Faire alors les A.N pour C et  $R_o$ .

**ANNEXE A : Diagramme des frigoristes de l'eau. (A RENDRE)**



**ANNEXE B-1 : Tableau des états du fluide dans le premier cycle étudié**  
**(A RENDRE)**

ETATS	Pression	Température	Enthalpie massique	Phase(s) observée(s)
	Bar	°C	$\text{kJ.kg}^{-1}$	
A	1,0	25		Liquide
B	40			
C				
D				
E				
F				