

## Introduction à la physique quantique.

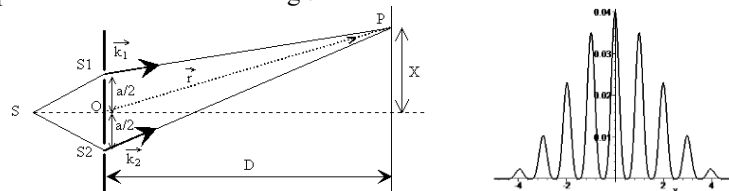
### 1. Dualité onde-particule pour la lumière.

#### 1.1. Retour sur le modèle ondulatoire de la lumière.

Le modèle ondulatoire de la lumière a déjà été présenté dans les cours précédents. On a vu que par décomposition spectrale et spatiale, on met en évidence le rôle fondamental de la source ponctuelle monochromatique qui émet dans tous les directions spatiales une onde progressive de célérité  $c$ .

Ce modèle explique une très large majorité des observations faites sur les propriétés du rayonnement électromagnétique qui sont alors faites à la fin du XIXème siècle.

On peut citer par exemple les expériences mettant en œuvre les phénomènes de diffraction et d'interférence parmi lesquelles l'expérience des fentes d'Young :



La courbe d'intensité est représentée en fonction de  $x = \frac{aX}{\lambda D}$  lorsque les fentes présentent une largeur  $a/5$ .

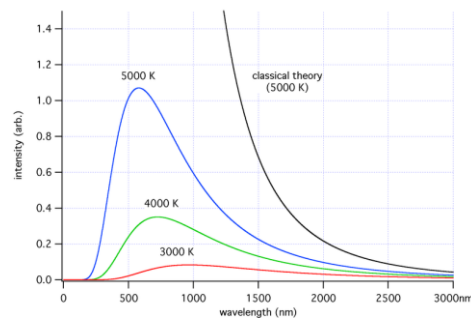
#### 1.2. L'introduction historique de la notion de quantum de lumière.

A la fin du XIXème, les modèles de la physique classique échouent cependant dans l'analyse d'observations expérimentales alors réalisées autour de certains phénomènes.

##### a. Le rayonnement du corps noir.

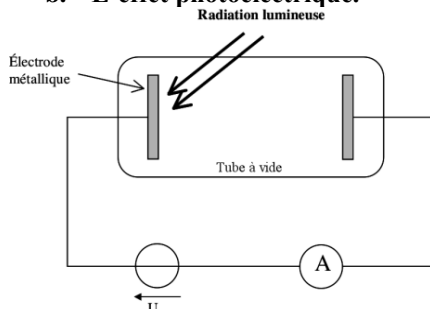
Les expériences menées sur l'analyse du spectre du rayonnement électromagnétique d'un corps dit noir ont mené à une courbe universelle dépendant uniquement de la température du corps.

La théorie basée sur un modèle classique de production du rayonnement par le corps noir ne permet pas de retrouver cette courbe, elle mène de plus à une divergence de l'intensité produite par le corps dans le domaine des basses longueurs d'onde, ce qu'on appela alors la catastrophe ultraviolette.



Max Planck utilise alors une nouvelle approche, utilisant toujours un modèle classique pour les ondes électromagnétiques, mais en faisant l'hypothèse que les échanges d'énergie entre le rayonnement et les parois du corps noir sont quantifiés. Il introduit une constante dans ses calculs et suppose que la plus petite quantité d'énergie pouvant être échangée s'écrit sous la forme :  $E = h\nu$ , où  $\nu$  est la fréquence du rayonnement et  $h$  une constante auxiliaire dont il déterminera la valeur par ajustement sur les courbes expérimentales.

##### b. L'effet photoélectrique.



On place deux plaques métalliques (électrodes) face à face dans un tube à vide. Sur une des deux électrodes, on envoie de la lumière, de fréquence et d'intensité réglable. De plus, grâce à une source de tension, on peut aussi appliquer une tension réglable  $U$  entre les deux électrodes. Enfin, un ampèremètre permet de mesurer le courant qui circule dans le circuit.

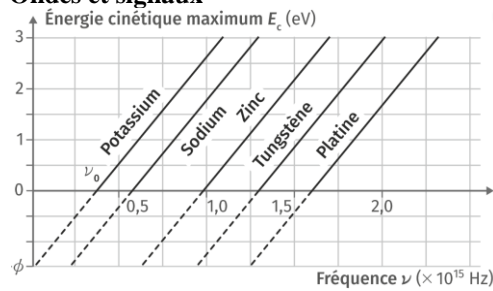
- Si on observe un courant, c'est que des électrons se déplacent dans le vide de l'électrode de gauche vers celle de droite. Ces électrons auront nécessairement été arrachés par la lumière à l'électrode de gauche.

- De plus, quand on applique une tension  $U$  positive, ces électrons sont attirés par l'électrode de gauche. Donc, pour qu'ils arrivent à traverser le tube à vide et que l'on observe un courant, il faudra qu'ils aient acquis initialement une énergie cinétique suffisante.

Si on fait le bilan :  $E_{C,g} - eV_g = E_{C,d} - eV_d$ , si l'électron arrive à droite, son énergie cinétique est positive ou

nulle on en conclue que l'électron traverse l'espace vide si  $E_{C,g} \geq -e(V_g - V_d) = eU$

**Conclusion :** Cet appareil permet de savoir si la lumière est capable d'arracher des électrons à la plaque métallique, mais aussi de savoir quelle est l'énergie cinétique (donc la vitesse) des électrons après avoir été arrachés.



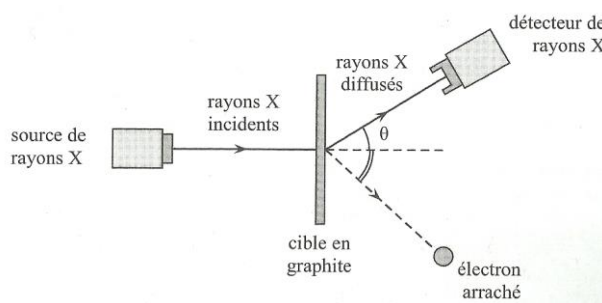
Lors des mesures quantitatives on observe que :

- l'énergie cinétique d'un électron émis présente une valeur maximale qui dépend linéairement de la fréquence du rayonnement
- l'émission d'électrons ne se produit qu'au-delà d'un seuil de fréquence dépendant de la nature du matériau.
- L'intensité du rayonnement ne modifie pas l'énergie cinétique maximale des électrons produits mais uniquement la quantité d'électrons produits.

Les modèles physiques de l'époque, celui de Thomson pour l'électron et celui de Maxwell pour le rayonnement, ne permettent pas d'expliquer ces observations.

Einstein introduit alors l'idée de la quantification du champ électromagnétique lui-même en attribuant au rayonnement un aspect corpusculaire, chaque grain de lumière transportant le quantum d'énergie  $h\nu$  introduit précédemment par Planck. L'interaction entre la matière et le rayonnement s'interprète alors par l'action de ce grain de lumière qui apporte l'énergie nécessaire pour arracher un électron.

### 1.3. Une expérience mettant en évidence la nécessité de la notion de photon : La diffusion Compton.



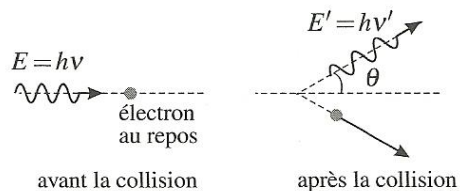
La diffusion du rayonnement électromagnétique est le phénomène selon lequel, un échantillon cible recevant un rayonnement incident, renvoie un rayonnement de même nature appelé rayonnement diffusé.

Les expériences menées par Compton en 1922, montrent que le rayonnement diffusé présente une fréquence qui est inférieure ou égale à la fréquence de l'onde incidente. Cette observation ne peut absolument pas être expliquée par les modèles classiques. La vision ondulatoire du rayonnement électromagnétique est alors remise en cause.

Pour expliquer la production de ce rayonnement diffusé, le **modèle classique** est le suivant :

- Le champ électromagnétique de l'onde incidente applique une force de Lorentz sur les constituants élémentaires de la matière. De par leur faible masse comparée à celle des noyaux atomiques, ce sont les électrons qui sont mis en mouvement en régime sinusoïdal forcé à la fréquence de l'onde incidente.
- Le principe fondamental de la dynamique amenant à une équation du mouvement linéaire, le mouvement des électrons est un mouvement sinusoïdal à la même fréquence en régime sinusoïdal forcé
- L'électron mis en mouvement produit alors l'onde diffusée, les équations de l'électromagnétisme étant également linéaires, **l'onde diffusée doit présenter la même fréquence que l'onde incidente.**

En revanche, les observations expérimentales s'expliquent parfaitement en introduisant la quantification du rayonnement électromagnétique. On imagine un corpuscule de lumière et on étudie alors le choc de ce corpuscule de lumière avec un électron :



Pour étudier ce choc, il est nécessaire d'attribuer au corpuscule de lumière une énergie  $E = h\nu$  et une quantité de mouvement :  $\vec{p} = \frac{h\nu}{c}\vec{u} = \frac{h}{\lambda}\vec{u}$  où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire donnant la direction et le sens du déplacement.

On montre alors avec un modèle relativiste pour l'électron que  $\lambda_{final} - \lambda_{init} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos \theta)$

**On retiendra que le modèle proposé est en accord parfait avec les expériences qu'avait menées Compton.**

### 1.4. Caractéristiques du photon.

#### a. Le résumé des propriétés.

On attribue au corpuscule introduit dans la description du rayonnement électromagnétique le nom de photon. Il est caractérisé par les propriétés suivantes :

- Il présente une masse nulle.
- Un photon associé à un rayonnement de fréquence  $\nu$  possède, d'après les relations dites de Planck-Einstein une énergie :  $E = h\nu$  et une quantité de mouvement :  $\vec{p} = \frac{h\nu}{c}\vec{u} = \frac{h}{\lambda}\vec{u}$

La constante de Planck qui intervient dans les expressions précédentes est une des constantes fondamentales de la physique. Elle est évaluée numériquement à la valeur :  $h = 6,64.10^{-34} J.s$

**b. Quelques ordres de grandeurs.**

Prenons pour commencer un photon associé à un rayonnement visible, de longueur d'onde  $\lambda = 500 \text{ nm}$ .

L'énergie de ce photon sera alors :  $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 4,0 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  d'on traduit en eV d'où  $E = 2,5 \text{ eV}$

Pour les différents sous-groupes des ondes électromagnétiques, on obtient alors le tableau suivant :

Rayonnement	$\lambda(\text{m})$	$\nu(\text{Hz})$	E(eV)
Rayon Gamma	$< 2 \cdot 10^{-11}$	$> 1,5 \cdot 10^{19}$	$> 6 \cdot 10^4$
Rayon X	$2 \cdot 10^{-11}$ à $10^{-8}$	$3 \cdot 10^{16}$ à $1,5 \cdot 10^{19}$	125 à $6 \cdot 10^4$
Ultraviolet	$10^{-8}$ à $4 \cdot 10^{-7}$	$7,5 \cdot 10^{14}$ à $3 \cdot 10^{16}$	3 à 125
Visible	$4 \cdot 10^{-7}$ à $7,5 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{14}$ à $7,5 \cdot 10^{14}$	1,5 à 3
Infrarouge	$7,5 \cdot 10^{-7}$ à $3 \cdot 10^{-4}$	$10^{12}$ à $4 \cdot 10^{14}$	$4 \cdot 10^{-3}$ à 1,5
Ondes hertziennes	$> 3 \cdot 10^{-4}$	$< 10^{12}$	$< 4 \cdot 10^{-3}$

**2. Dualité onde-particule pour la matière.**

**2.1. L'onde de matière de de Broglie.**

**a. Une approche simple.**

A partir des expériences et des interprétations qui en ont été faites dans la première partie, la lumière semble donc présenter un aspect ondulatoire et un aspect corpusculaire.

La description corpusculaire de la matière était alors le point de vue classique. Une question s'impose alors naturellement, la matière présente-t-elle aussi un aspect ondulatoire et quelles seraient les caractéristiques associées à cette onde de matière ?

**b. La longueur d'onde de de Broglie.**

L'idée est introduite initialement par Louis de Broglie en 1923. Il postule qu'à une particule de matière libre, qui n'est donc soumise à aucune interaction, on peut associer une onde monochromatique, présentant une longueur d'onde dite de de Broglie.

L'expression actualisée de cette longueur d'onde est donnée par la relation de de Broglie :

- $\lambda_{dB} = \frac{h}{\|\vec{p}\|}$  où  $\vec{p}$  est la quantité de mouvement de cette particule.

**c. Quelques ordres de grandeur.**

Dans le cadre de la mécanique classique, la quantité de mouvement d'une particule de matière de masse m et de vecteur vitesse  $\vec{v}$  s'exprime :  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

	Coureur	Balle de tennis	Grain de poussière	Neutron thermique	Electron de vitesse c/10
m (kg)	60	$6 \cdot 10^{-2}$	$10^{-6}$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	$9,1 \cdot 10^{-31}$
v (m.s <sup>-1</sup> )	2	25	$10^{-3}$	2700	$3 \cdot 10^7$
$\lambda_{dB}$ (m)	$5,5 \cdot 10^{-36}$	$4,4 \cdot 10^{-34}$	$6,6 \cdot 10^{-25}$	$1,5 \cdot 10^{-10}$	$2,4 \cdot 10^{-11}$

D'après les valeurs estimées sur les quelques exemples précédents, il est impossible d'envisager une mesure de la longueur d'onde de de Broglie pour les trois premiers éléments. A l'échelle d'observation de ces trois éléments (de l'ordre du mètre, du centimètre et du micromètre) cette longueur d'onde est infime, on peut en conclure que la nature ondulatoire de ces objets matériels ne se manifeste pas.

Pour les particules faisant partie de la structure atomique de la matière, le constat est tout autre. Les longueurs d'onde de de Broglie sont suffisamment importantes pour qu'on ne puisse plus négliger leur nature ondulatoire dans l'étude de ces objets à l'échelle  $10^{-11}$ - $10^{-10}$  m, or il s'agit justement de l'ordre de grandeur de la taille d'un atome.

**2.2. Une expérience illustrant la notion d'onde de matière.**

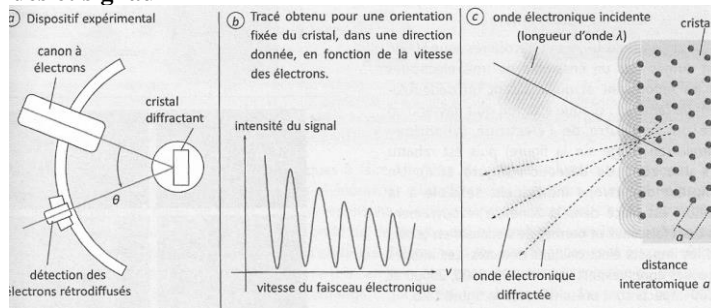
En résumé, on veut mettre en évidence la nature ondulatoire de la matière.

- On sait que les expériences de diffraction et d'interférence s'interprètent à l'aide du modèle ondulatoire appliqué à l'objet d'étude mais ne peuvent pas s'interpréter par un modèle corpusculaire.
- On sait également que ces phénomènes se manifestent lorsque la longueur d'onde de l'onde étudiée est d'un ordre de grandeur similaire à la taille caractéristique de l'obstacle.

Puisque la longueur d'onde de de Broglie est de l'ordre de la taille d'un atome, on sait qu'on doit étudier le comportement d'une onde de matière lorsque l'obstacle placé sur son chemin présente une taille caractéristique du même ordre de grandeur. Cette idée fut mise en œuvre dès 1927 par Davidson et Germer.

- Avec un canon à électron où on applique une tension de 54V, on produit un flux d'électrons « lents de vitesse  $4,36 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$ , la longueur d'onde de de Broglie associée est alors de  $1,67 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .

La distance interatomique dans le réseau cristallin du Nickel est alors connue, elle est de  $2,15 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .



L'expérience réalisée montre une très bonne cohérence des résultats avec le calcul de l'onde diffractée par le modèle ondulatoire :

- Davidson et Germer mesurent un pic secondaire de l'intensité de l'onde diffractée pour un angle de  $50^\circ$ .
- La théorie ondulatoire prédit que ce pic est situé à la première position pour laquelle l'interférence des ondes réfléchies par les différents atomes est constructive ce qui donne :  $\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$  correspondant à  $\theta = 50^\circ 58'$ .

Ce succès quasiment immédiat de la théorie de de Broglie lui valut le prix Nobel de physique dès 1929.

### 2.3. Résumé des relations et équivalences entre caractéristiques de la matière et de la lumière.

	Modèle ondulatoire	Modèle corpusculaire
Rayonnement électromagnétique	Fréquence $\nu$ ; Longueur d'onde $\lambda$	Masse nulle Relations de Planck Einstein : $E = h\nu$ ; $\vec{p} = \frac{h}{\lambda} \vec{u}$
Matière (théorie classique) Particule libre	Longueur d'onde de de Broglie : $\lambda_{dB} = \frac{h}{\ \vec{p}\ }$	Masse $m$ $E_C = \frac{1}{2} m \ \vec{v}\ ^2$ ; $\vec{p} = m\vec{v}$

## 3. Interprétation probabiliste associée à la fonction d'onde.

### 3.1. Expérience d'interférence particule par particule.

#### a. Un questionnement assez naturel.

Quel que soit la nature de l'objet étudié, les expériences d'interférences classiques mettent en œuvre un grand nombre de particules, et elles s'interprètent via un modèle ondulatoire.

Déterminons par exemple le nombre de photons émis chaque seconde par un laser He-Ne de longueur d'onde 633nm et de puissance  $P = 1,0$  mW.

L'énergie émise sur une seconde est :  $E_{Tot} = P \cdot \Delta t = 1,0$  mJ. Chaque photon associé à ce rayonnement présente une énergie individuelle  $E = h\nu = 3,15 \cdot 10^{-19}$  J. Chaque seconde, le laser produit donc  $N = \frac{E_{Tot}}{E} = 3,2 \cdot 10^{15}$  photons.

A contrario, les expériences comme la diffusion Compton s'interprète via le modèle corpusculaire comme l'interaction individuelle d'un photon avec une particule de matière.

Se pose alors assez naturellement la question suivante :

Les expériences interprétées via le modèle ondulatoire fournissent-elles en fait une observation d'un comportement collectif des particules alors que celles interprétées via le modèle corpusculaire fournissent une observation de leur comportement individuelle ?

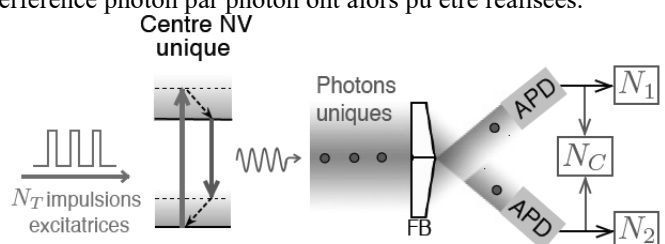
Pour répondre à la question posée, on réalise des expériences pour lesquelles les particules étudiées sont envoyées une à une dans le système permettant de réaliser les observations du phénomène d'interférence. On exclut ainsi la possibilité pour ces particules d'interagir entre elles, et on élimine donc la possibilité que le modèle ondulatoire fournisse des observations sur le comportement collectif des particules.

#### b. Description du système et résultats d'une expérience d'interférence photon par photon.

La réalisation de source de lumière produisant les photons unité par unité n'a pu être réalisée pour la première fois qu'au milieu des années 1980, et les expériences d'interférence photon par photon ont alors pu être réalisées.

Une première expérience est réalisée avec un interféromètre utilisant un biprisme de Fresnel et une source de photon unique basée sur les propriétés du centre coloré NV du diamant.

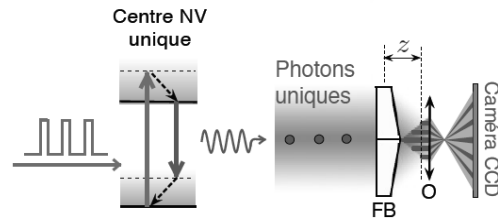
On place sur les deux voies de sortie de l'interféromètre des détecteurs lumineux capables de détecter un unique photon (photodiodes à avalanche). On enregistre alors les détections sur chacune des voies de l'interféromètre.



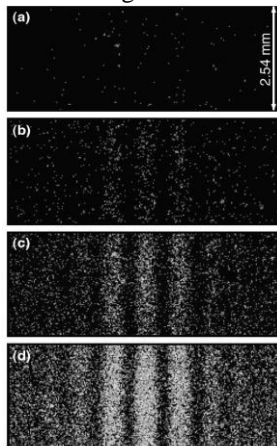
Les résultats de l'expérience ont été les suivants :

- Les photons passent bien dans l'interféromètre un par un.
- On ne détecte chacun des photons passant dans l'interféromètre que dans une voie de l'interféromètre. Le photon semble donc passé uniquement d'un côté quand on cherche à déterminer le chemin qu'il a suivi.

On utilise la même source et le même interféromètre mais avec un système de détection étendu, ne permettant plus de déterminer si un photon est passé par la voie 1 ou la voie 2 de l'interféromètre mais permettant de déterminer la répartition spatiale des impacts de chacun des photons reçus dans un plan derrière le biprisme de Fresnel.



Les résultats enregistrés sont les suivants :

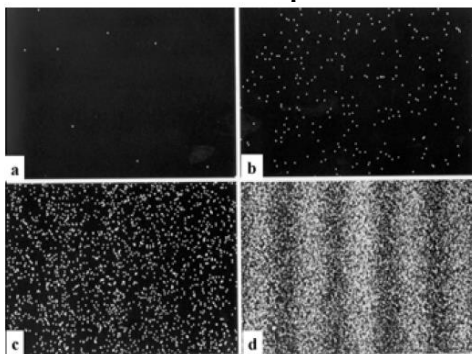


Les images présentées (a), (b), (c) et (d) correspondent respectivement à ce qui est enregistré par la caméra en accumulant 10, 100, 500 et 2000 enregistrements de durée individuelle 1s. Sur une seconde, le nombre de photons détectés était en moyenne de 10.

On retrouve la figure d'interférence en accumulant les impacts de quelques dizaines de milliers de photons sur le détecteur de lumière. L'interprétation est la suivante :

- Chaque photon va venir frapper le détecteur et sera alors détecté par un unique pixel de la caméra CCD. Cependant, la probabilité que cet impact ait lieu dépend de la position considérée sur le détecteur.
- L'accumulation des photons redonne la figure d'interférence prévue par le modèle ondulatoire de la lumière. Il semble donc que ce modèle permette de déterminer la probabilité de détecter un photon en tout point du détecteur de lumière.

### c. Résultat d'une expérience d'interférence électron par électron.



Par le même schéma de pensée, des expériences d'interférence à électron unique ont été réalisées par un groupe japonais (Tonomura et associés) et présentés en 1989.

De a à d, la figure présente les observations faites avec le cumul de 8,270, 2000 puis 60000 électrons.

On retrouve les mêmes caractéristiques et les mêmes interprétations que pour l'expérience menée sur des photons.

## 3.2. Lien entre probabilité de détection et l'onde associée au phénomène observé.

### a. Fonction d'onde et probabilité de détection.

On associe à une particule quantique une fonction d'onde, notée généralement  $\underline{\psi}(M,t)$ , qui prend dans le cas général ses valeurs dans le corps des complexes et qui caractérise l'état de la particule.

La densité de probabilité de détecter la particule en un point M est alors proportionnelle au module au carré de la fonction d'onde :  $f(M) = |\underline{\psi}(M,t)|^2$ .

La probabilité de détecter la particule dans un volume infinitésimal  $d\tau(M)$  s'exprime alors  $dp(M,t) = f(M)d\tau(M) = |\underline{\psi}(M,t)|^2 d\tau(M)$

### b. Interprétation des expériences particule par particule.

Dans la première expérience sur les photons, il y a deux résultats possibles pour le suivi d'une particule unique, il est détecté sur la voie 1 ou sur la voie 2.

Si les deux voies sont éclairées de manière identique, l'intensité lumineuse est la même sur les deux voies et la probabilité de détecter la particule (photon) sur chaque voie est la même. On obtient alors une probabilité de  $\frac{1}{2}$  pour détecter le photon sur chacune des voies, et la probabilité totale de détecter le photon est bien unitaire. On exclut par l'interprétation faite la possibilité de détecter la particule sur les deux voies. Le résultat de cette première expérience est conforme à l'interprétation probabiliste.

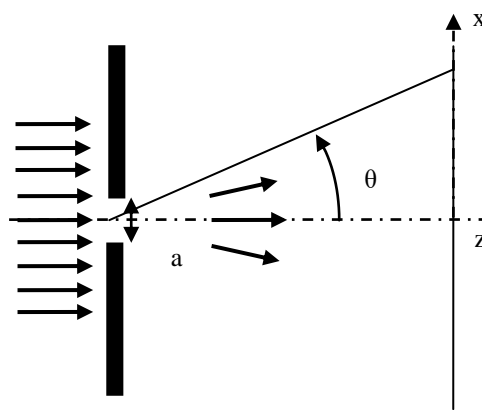
Dans la seconde expérience sur les photons, on peut déterminer la fonction d'onde associée à une particule par le phénomène d'interférence. Sur l'écran éclairé par les deux voies de l'interféromètre, elle résulte de la superposition de deux ondes cohérentes  $\underline{\psi}_1(M,t)$  et  $\underline{\psi}_2(M,t)$  ce qui donnera une probabilité de détecter le photon en un point de l'écran exprimée par :

$$f(M) = |\underline{\psi}_1(M,t) + \underline{\psi}_2(M,t)|^2 = |\underline{\psi}_1(M,t)|^2 + |\underline{\psi}_2(M,t)|^2 + \underline{\psi}_1(M,t)\underline{\psi}_2^*(M,t) + \underline{\psi}_1^*(M,t)\underline{\psi}_2(M,t)$$

$$f(M) = |\underline{\psi}_1(M,t)|^2 + |\underline{\psi}_2(M,t)|^2 + 2|\underline{\psi}_1(M,t)||\underline{\psi}_2(M,t)|\cos(\varphi_{2,1})$$

On retrouve alors une forme similaire à celle vue dans le cours sur les interférences à deux ondes, généralisée au cas de fonctions d'onde complexes.

### 3.3. Introduction de l'inégalité spatiale de Heisenberg.



On réinterprète ici l'expérience de diffraction par une fente (de la lumière par exemple) en terme particulaire.

L'onde initialement envoyée sur l'écran diffractant est constituée de particules dont on connaît exactement la quantité de mouvement par la relation de Planck-Einstein  $\vec{p} = \frac{h}{\lambda} \vec{u}_z$ . L'onde étant plane, son extension selon l'axe x est par contre infinie.

En faisant passer l'onde à travers la fente, on cherche à limiter à la valeur a, soit la largeur de la fente, l'indétermination sur la position de la particule le long de l'axe Ox. On observe alors que la quantité de mouvement projetée sur l'axe Ox de la particule est indéterminée. On peut estimer cette indétermination à l'aide de la relation présentée dans le cours sur les ondes :  $\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$ .

Les indéterminations sont alors exprimées par :  $\Delta x = a$  et  $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \sin \theta = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{a}$

On constate alors un lien entre ces deux indéterminations qui serait exprimable sous la forme :  $\Delta x \Delta p_x = h$

Ce raisonnement en ordre de grandeur permet d'obtenir une idée et une compréhension du résultat. Les équations de la mécanique quantique permettent d'obtenir quantitativement le résultat suivant.

**Énoncé de l'inégalité spatiale de Heisenberg :** les mesures de position selon un axe de la position et la quantité de mouvement d'une particule sont affectées d'indéterminations d'origine quantique dont le produit doit respecter l'inégalité spatiale d'Heisenberg qui s'écrit :  $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ . On retiendra l'ordre de grandeur

$$\frac{\hbar}{2} \approx 10^{-34} \text{ J.s}$$

- L'expérience précédente est bien en accord avec ce principe.
- Ce principe d'Heisenberg est cohérent avec la théorie quantique se basant sur l'équation de Schrödinger. L'équivalence entre les deux est démontrable mais elle demande des développements théoriques et calculatoire trop long pour être exposé ici.

### 3.4. Une dernière remarque qualitative.

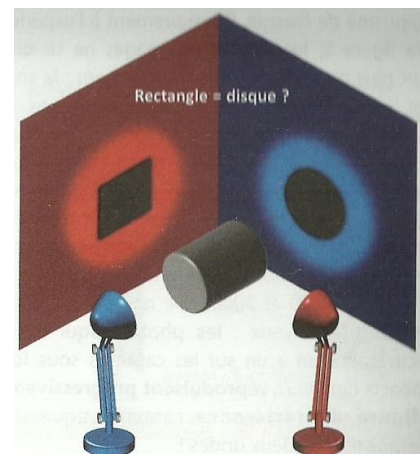
La description du rayonnement électromagnétique et de la matière est donc faite selon les expériences soit par le modèle ondulatoire soit par le modèle corpusculaire.

La question qui apparaît naturellement est alors : « la nature profonde de ces objets est-elle ondulatoire ou corpusculaire ? »

Une réponse naïve possible serait « les deux à la fois ».

Le point de vue à adopter serait plutôt le suivant : la lumière autant que la matière sont constituées d'objets quantiques qui manifestent les propriétés d'une onde dans certaines expériences et les propriétés d'une particule dans d'autres.

La métaphore du cylindre est souvent utilisée pour illustrer ce concept, elle est présentée sur la figure ci-contre. Selon l'éclairage obtenu grâce à la lampe bleue, le cylindre présente l'aspect d'un disque, et selon l'éclairage de la lampe rouge il présente l'aspect d'un rectangle. On comprend bien que la question « est ce un disque ou un rectangle ? » n'a aucun sens et que répondre qu'il est « les deux à la fois » n'en a pas plus. Il s'agit d'un objet plus complexe qui présente les deux aspects selon les conditions dans lesquelles on l'observe.



## 4. Quantification de l'énergie.

### 4.1. Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène.

#### a. L'étude du problème par la mécanique classique. Le modèle planétaire de Rutherford.

Un atome d'hydrogène est constitué d'un électron de charge  $-e$  et de masse  $m=9,0.10^{-31}$ kg et d'un proton de charge  $e=1,610^{-19}$ C et de masse  $m_p=1,67.10^{-27}$ kg.

Dans le modèle de Rutherford, on étudie le mouvement de l'électron dans le référentiel lié au proton supposé galiléen dans le cadre de la mécanique classique.

La force appliquée à l'électron par le proton est la force coulombienne  $\vec{F}_{p^+ \rightarrow e^-} = \frac{k}{r^2} \vec{u}_{p^+ \rightarrow e^-} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{p^+ \rightarrow e^-}$

En appliquant le théorème du moment cinétique à l'électron dans le référentiel du proton, on obtient :

$$\left( \frac{d\vec{L}_{e^-, p^+}}{dt} \right) = \vec{p}^+ e^- \wedge \vec{F}_{p^+ \rightarrow e^-} = \vec{0} \text{ et } \boxed{\text{on en déduit que } \vec{L}_{e^-, p^+} \text{ est conservé.}}$$

On sait de plus que la force coulombienne est une force conservative, c'est la seule force qui s'applique et on en déduit que le système est conservatif. **L'énergie mécanique  $E_m$  est conservée.**

On fait l'hypothèse que l'électron suit une trajectoire circulaire de rayon  $R$  :

#### Cinématique en coordonnées polaires :

position  $\vec{p}^+ e^- = R\vec{e}_r$ , vitesse  $\vec{v}_e = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta$ , accélération  $\vec{a}_e = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = \dot{v}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_r$

La conservation du moment cinétique implique la relation :  $\boxed{\vec{L}_{e^-, p^+} = mC\vec{e}_z = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = mRv\vec{e}_z}$

La conservation de l'énergie mécanique amène alors à  $\boxed{E_m = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}}$

#### Application de la seconde loi de Newton :

$\left( \frac{d\vec{p}_{e^-}}{dt} \right) = \vec{F}_{p^+ \rightarrow e^-}$  projeté sur  $\vec{e}_\theta$   $\dot{v} = 0$  donc la vitesse est constante puis projeté sur  $\vec{e}_r$   $-m\frac{v^2}{R} = \frac{k}{R^2}$

On obtient donc la relation  $\boxed{Rv^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m}}$

#### b. Insuffisance de ce modèle classique.

Ce modèle planétaire où l'électron tourne autour du proton comme une planète tourne autour du soleil pose alors problème pour deux raisons :

- En tant que particule chargée électriquement et dont l'accélération n'est pas nulle, l'électron est une source de rayonnement électromagnétique et il doit donc perdre de l'énergie pour produire ce rayonnement.
- Même si l'état d'un électron était stationnaire, son énergie mécanique constante peut prendre n'importe quelle valeur, ce qui implique qu'il peut interagir avec un rayonnement électromagnétique de n'importe quelle longueur d'onde, ce qui est en contradiction avec l'expérience menée par Balmer en 1885 qui montre que les longueurs d'onde absorbées ou émises par un atome d'hydrogène dans le visible respectent la relation :

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_{abs}} = R_H \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad n_2 > 2}$$

#### c. L'intervention de Bohr.

Bohr construit alors son modèle de l'atome d'Hydrogène en reprenant l'idée de Rutherford et en plus ajoutant les hypothèses suivantes :

- Il postule l'existence d'états stationnaires de l'électron sur lesquels il n'émet pas de rayonnement.
- Il suppose que le moment cinétique de l'électron est quantifié  $\|\vec{L}_n\| = n\hbar$  où  $\hbar = 1,05.10^{-34}$  J.s
- Il postule que l'échange d'énergie entre l'atome d'hydrogène et le rayonnement électromagnétique se fait par l'intermédiaire de photons dont l'énergie correspond à la différence entre les énergies des états possibles de l'électron.

Il reprend les relations précédentes :  $\|\vec{L}_n\| = n\hbar = mR_n v_n$  et  $R_n v_n^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m}$



Ce qui amène à établir que le rayon de l'état de nombre quantique  $n$  s'écrit :  $R_n = \frac{4\pi\epsilon_0}{m} \left( \frac{n\hbar}{e} \right)^2$

L'énergie de l'électron sur le niveau de nombre quantique  $n$  est alors :  $E_n = -\frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0\hbar)^2} \frac{1}{n^2}$

L'application numérique donne alors  $E_n = -\frac{13,6}{n^2} eV$

**d. Succès et limites du modèle Bohr.**

- Le premier succès du modèle de Bohr est de restituer les raies de Balmer de l'atome d'hydrogène, en effet, l'énergie du photon absorbé ou émis par l'atome d'hydrogène s'exprime  $E_{n < m} = |E_n - E_m| = 13,6 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$

Ce qui amène avec  $n=2$  à la série de Balmer avec la constante de Rydberg qui prend la valeur attendue de  $1,1 \cdot 10^8 m^{-1}$  et prédit l'existence d'autres séries qui seront observées expérimentalement (Lyman pour  $n=1$  dans l'UV, série de Paschen pour  $n=3$ , Brackett pour  $n=4$  dans l'infra rouge).

- La quantification de l'énergie des atomes permet d'interpréter l'expérience de Franck et Hertz pour laquelle Bohr retrouve les résultats expérimentaux en supposant que les électrons de l'atome de mercure échantent de l'énergie par « paquet d'environ 5eV ».
- Par la suite, les limites du modèle de Bohr sont rapidement observées puisque dès 1920 la spectroscopie progresse suffisamment pour observer :
  - La structure fine des raies d'hydrogène. Sommerfeld modifie le modèle en introduisant un moment cinétique  $m_s$  intrinsèque de l'électron (souvent appelé le spin).
  - La modification des raies sous l'effet d'un champ électrique, dit effet Stark. Il faut introduire deux nombres quantiques supplémentaires,  $l$  prenant ses valeurs entières entre 0 et  $(n-1)$  amenant à lister les sous couches dans une couche électronique de l'atome, et  $m_l$  prenant ses valeurs entières entre  $-l$  et  $l$ , donnant le nombre d'états quantiques sur une sous couche.
  - Les raies des atomes à plusieurs électrons qui sont interpréter en listant les valeurs de  $(m,l)$ .
- Le modèle de Bohr n'est pas apte à rendre compte de la liaison covalente des atomes dans les molécules qui consistent à associer sur un même état quantique deux électrons de spins opposés.

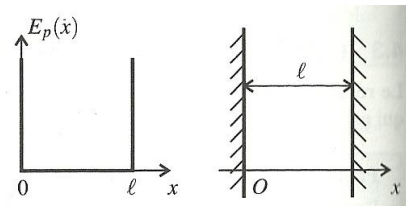
**4.2. Cas du puit de potentiel infini.**

**a. Présentation du système.**

On étudie une particule, de lumière ou de matière, confinée dans une région de l'espace. On se restreint à l'étude du cas à une dimension, on introduit alors un axe Ox associé à la coordonnée spatiale  $x$ .

Le confinement de la particule peut être vu comme étant la conséquence de l'existence d'un puits de potentiel infini. L'énergie potentielle, présente alors les caractéristiques ci-contre :

$$E_p(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < l \\ \infty & \text{si } x > l \end{cases}$$



**b. Energie minimale de confinement.**

On observe donc que la particule est confinée dans un espace de longueur  $l$  le long de l'axe (Ox), on réduit donc l'indétermination sur sa position de long de l'axe (Ox) à  $\Delta x = l$ .

L'inégalité spatiale de Heisenberg prédit alors que l'indétermination sur la quantité de mouvement de la particule est soumise à l'inégalité suivante :  $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2l}$

Prenons le cas d'une particule de matière :

L'énergie cinétique s'exprime  $E_C(t) = \frac{p_x^2}{2m}(t)$  et sa moyenne s'exprime  $\langle E_C \rangle = \left\langle \frac{p_x^2}{2m} \right\rangle$  où  $p_x$  prend ses valeurs dans

l'intervalle  $[p_{moyenne} - \delta p, p_{moyenne} + \delta p]$  ce qui dans le pire des cas se réduit à  $[-\Delta p_x, \Delta p_x]$ .

L'énergie de la particule confinée dans le puit de potentiel infinie est alors :

$$\langle E_m \rangle = \langle E_C \rangle + \langle E_p \rangle = \langle E_C \rangle = \left\langle \frac{p_x^2}{2m} \right\rangle \geq \frac{\hbar^2}{8ml^2}$$

**L'énergie d'une particule confinée ne peut donc pas être nulle d'après l'inégalité de Heisenberg.**

On met alors en évidence **une énergie minimale pour la particule associée au confinement** de cette dernière.



**c. Détermination des modes propres du système par analogie avec la corde vibrante.**

On adopte l'approche introduite précédemment en associant à la particule une fonction d'onde  $\underline{\psi}(M, t)$  dont le module au carré permet de déterminer la probabilité de détecter la particule en un point M.

La particule est confinée dans l'espace  $]0, l[$ . On cherche donc une fonction d'onde qu'on supposera continue et qui respecte les deux conditions aux limites :  $\underline{\psi}(x \leq 0, t) = 0$  et  $\underline{\psi}(x \geq l, t) = 0$ .

Un ensemble de solutions à ce problème a déjà été étudié et mis en évidence dans le chapitre sur la superposition des ondes, ce sont les ondes stationnaires présentant un nœud en  $x=0$  et un nœud en  $x=l$ .

Pour une particule quantique, on prend la forme complexe suivante :  $\underline{\psi}(x, t) = A \exp(j\omega t) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi\right)$

La première condition imposant le nœud en  $x = 0$  se traduit par :  $\underline{\psi}(0, t) = A \exp(j\omega t) \cos(\varphi) = 0$

On peut alors réécrire la fonction d'onde sous la forme :  $\underline{\psi}(x, t) = A \exp(j\omega t) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = 0$

La seconde condition imposant le nœud en  $x = l$  se traduit par :  $\underline{\psi}(l, t) = A \exp(j\omega t) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} l\right)$

Elle impose donc à la longueur d'onde de respecter la condition :  $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} l\right) = 0$

Les longueurs d'ondes respectant cette condition s'expriment sous la forme :  $\lambda_k = \frac{2l}{k}$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ .

On met donc ici en évidence l'existence de modes propres pour le problème de la particule confinée, chacun de ces modes propres correspond à une valeur possible de la longueur d'onde lui permettant de respecter les conditions aux limites.

Sa quantité de mouvement est alors donnée par  $\|\vec{p}\|_k = \frac{h}{\lambda_k} = k \frac{h}{2l}$

On a alors deux cas possibles pour déterminer l'énergie d'une particule qui se trouve dans un état associé à un mode propre de la cavité étudiée :

- Si la particule est un photon, son énergie est donnée par :  $E = E_c = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \|\vec{p}\| \cdot c = k \frac{h \cdot c}{2l}$
- Si la particule est un élément de matière, son énergie est donnée par :  $E = E_c = \frac{\|\vec{p}\|^2}{2m} = k^2 \frac{h^2}{8ml^2}$

Lorsqu'une particule est confinée dans un intervalle spatial restreint par un puits de potentiel infini, les grandeurs physiques qui lui sont associées sont quantifiées d'après l'étude que nous venons de mener. Ce résultat est généralisable à n'importe quel type d'état lié de la matière.

**Capacités exigibles**

- Définir la dualité onde-corpuscule pour la lumière et la matière.
- Connaître et utiliser les relations de Planck-Einstein ainsi que la relation de de Broglie.
- Analyser une expérience mettant en évidence la nécessité de la notion de photon.
- Analyser une expérience illustrant la notion d'onde de matière.
- Interpréter une expérience d'interférences (matière ou lumière) « particule par particule » en termes probabilistes. Connaître l'interprétation probabiliste associée à la fonction d'onde.
- Savoir énoncer l'inégalité d'Heisenberg. L'illustrer par l'analyse d'une expérience de diffraction.
- Établir le lien qualitatif entre confinement spatial et quantification sur l'exemple du puits de potentiel infini unidimensionnel.

**Exercice 1 : Exploitation des relations de Planck-Einstein et de de Broglie.**

Un téléphone portable fonctionne à partir de la modulation d'ondes électromagnétiques de type hertzien, dont la fréquence est de 1,8GHz. La puissance d'une telle source d'ondes hertziennes est de 2mW.

1. Exprimer la longueur d'onde de ce rayonnement, ainsi que l'énergie correspondante. Faire les applications numériques respectivement en m et en eV.
2. Rappeler l'ordre de grandeur de l'énergie de liaison covalente dans une molécule. Comparer les énergies en jeu et commenter.
3. Exprimer N le flux de photons produits (c à d le nombre de photons produits par seconde). Faire l'application numérique.

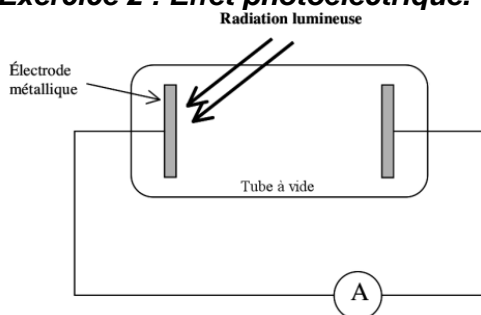
L'expérience montre que l'œil humain est très sensible à la lumière provenant du soleil, puisqu'il peut détecter un flux énergétique minimale  $\Phi_{\min} = 1,6 \cdot 10^{-18}$  W. La longueur d'onde correspondant au maximum d'émittance du soleil est  $\lambda = 590$  nm.

4. Déterminer l'énergie d'un photon et le flux minimal détecté par l'œil humain. Faire les applications numériques.

Pour sonder la matière condensée et particulièrement la structure cristalline des solides, on utilise plusieurs sources de particules dont des sources de neutrons dit thermiques. La vitesse des neutrons produits est estimable en l'identifiant à la vitesse quadratique des particules sous l'effet de l'agitation thermique. On donne la valeur de la constante de Boltzmann  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J.K<sup>-1</sup> et de la masse du neutron  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg. On note T la température.

5. Exprimer la vitesse quadratique moyenne des neutrons en leur appliquant le modèle du gaz parfait monoatomique.
6. Exprimer la longueur d'onde de de Broglie  $\lambda_{DB}$  de neutrons thermiques de température T. Faire les applications numériques pour des températures de 25, 300 et 2000 K.
7. En déduire quelle température de la source de neutrons est adaptée à l'étude des réseaux cristallins.

**Exercice 2 : Effet photoélectrique.**



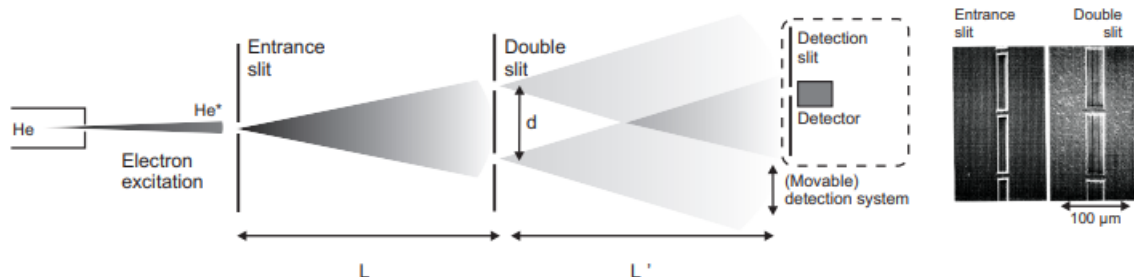
La cathode (électrode émettrice d'électrons) d'une cellule photoélectrique au potassium est éclairée par une lumière monochromatique de puissance  $P = 9,00 \cdot 10^{-7}$  W et de longueur d'onde  $\lambda_1 = 490$  nm. Le travail minimal à fournir pour arracher un électron au potassium est  $W_0 = 2,25$  eV.

1. L'émission d'électrons est-elle possible avec l'éclairage fourni ?
2. Déterminer l'expression de la vitesse maximale atteinte par les électrons émis par la cathode dans les conditions envisagées et faire l'application numérique.

On observe que l'intensité du courant circulant est alors mesuré à  $I = 4,00 \cdot 10^{-8}$  A.

3. Déterminer le rendement quantique de la cellule, c'est à dire le rapport du nombre d'électrons émis au nombre de photons reçus.

**Exercice 3 : Expérience des fentes d'Young réalisée avec des atomes d'Hélium.**



En 1991, les chercheurs O. Carnal et J. Mlynek ont réalisé une expérience d'interférences à partir d'atomes d'hélium. Les interférences ont été obtenues à l'aide d'un dispositif de type fentes d'Young présenté ci-dessus.

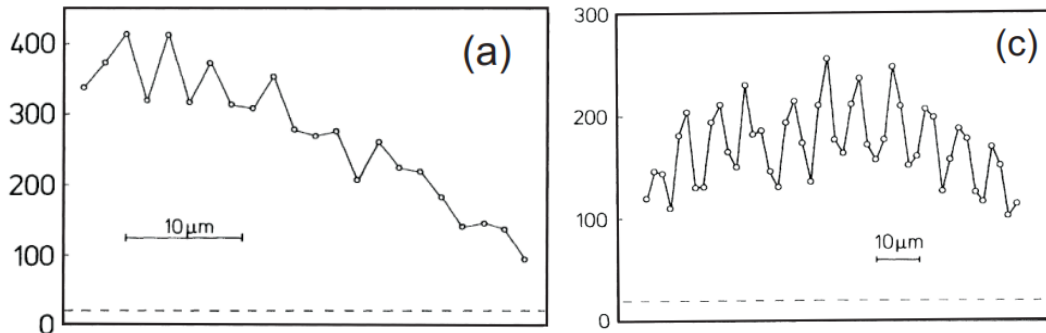
La réalisation pratique de cette expérience est extrêmement ardue du fait, entre autres, de la très faible valeur de la longueur d'onde de de Broglie, qui dans cette expérience de l'ordre de  $10^{-10}$  m.

Dans ce dispositif, les atomes d'hélium rencontrent une première fente F de largeur  $s_1 = 2$  μm puis un dispositif de deux fentes de largeur  $s_2 = 1$  μm et distantes de  $a = 8$  μm. Les distances L et L' valent 64 cm. Un détecteur placé à l'arrière de l'écran compte les impacts des atomes d'hélium. La partie sensible du détecteur a une largeur de 2 μm et il est déplacé par pas de 1,88 μm.

Les figures suivantes donnent le décompte du nombre d'impacts détectés dans les deux cas suivants :

- (a) Les neutrons sont issus d'une source de température  $T_1 = 295$  K et la durée de mesure à chaque position est de 10 minutes.

- (b) Les neutrons sont issus d'une source de température  $T_2=83\text{K}$  et la durée de mesure à chaque position est de 5 minutes. On emploie de plus en sortie du système une double fente permettant d'amplifier le contraste de la mesure.

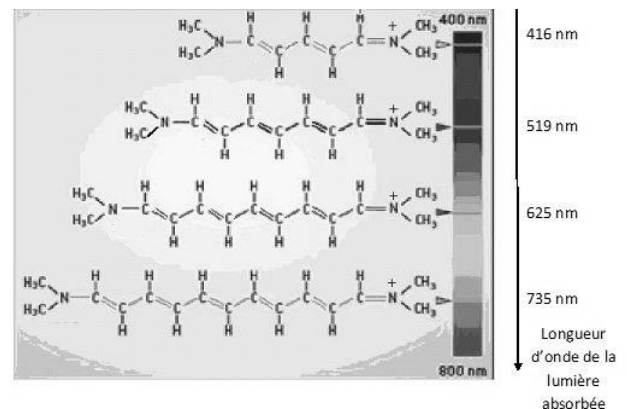


1. Exprimer la vitesse quadratique moyenne des atomes d'hélium en fonction de  $k_B$ ,  $T$  et  $m$ . Faire les A.N pour  $T_1$  et  $T_2$ . Estimer la durée mise par un atome pour aller de la fente  $F$  au détecteur pour la température  $T_1$ .
2. Estimer le nombre d'atomes reçus en moyenne par le détecteur pendant 10 minutes. En considérant la largeur totale de la zone d'impacts dans le plan de détection, en déduire l'ordre de grandeur du nombre d'atomes traversant en moyenne l'appareil pendant 10 minutes puis le temps moyen séparant deux impacts.
3. Comparer le temps moyen entre deux impacts et la durée de traversée du système par un neutron et commenter.
4. Exprimer la longueur d'onde  $\lambda_{dB}$  de de Broglie de ces atomes. Faire les A.N pour  $T_1$  et  $T_2$ .
5. Calculer  $\theta$  le demi angle au sommet de la zone centrale du faisceau diffracté derrière la fente  $F$ . Vérifier que  $F_1$  et  $F_2$  sont bien « éclairées » par ce faisceau.
6. Calculer de même  $\theta'$  le demi angle pour les faisceaux sortant de  $F_1$  et  $F_2$  et calculer la largeur de la zone de recouvrement des deux ondes diffractées dans le plan de détection.
7. En étudiant le système des fentes d'Young comme en optique, exprimer l'interfrange  $i$  de la figure d'interférences en fonction de  $L'$ ,  $d$  et  $\lambda_{dB}$ . Vérifier la cohérence de l'application numérique avec les graphiques.

#### Exercice 4 : Colorants organiques.

Les cyanines sont des colorants organiques répandus. Quelques-unes d'entre elles sont représentées ci-contre : elles sont caractérisées par la répétition d'un même motif  $p$  fois (les cas  $p = 2, 3, 4$  et  $5$  sont représentés ci-contre), la bande d'absorption dans le visible se déplaçant à mesure que  $p$  varie, passant du bleu (pour  $p = 2$ ) au rouge (pour  $p = 5$ ).

Dans cet exercice, on se propose d'analyser la couleur des cyanines en utilisant le modèle du puits infini. On considère pour cela que les  $(p+1)$  doublets  $\pi$  délocalisés sur l'ensemble de la molécule sont libres de se déplacer entre les deux atomes d'azote.



1. En considérant que toutes les liaisons C-C ainsi que les deux liaisons C-N concernées ont la même longueur  $a = 0,14 \text{ nm}$ , exprimer la longueur  $L$  qui doit être considérée pour la circulation des électrons  $\pi$  en fonction de  $p$  et  $a$ .
2. La molécule est modélisée par un puits quantique infini de largeur  $L$ . Exprimer les énergies  $E_n$  envisageables pour un électron dans ce puits.
3. Les électrons remplissent ces niveaux d'énergie par ordre d'énergie croissante, en respectant le principe de Pauli (deux électrons au plus par niveau). Montrer que le plus haut niveau peuplé est le niveau  $E_{p+1}$ .
4. Lorsque la molécule absorbe un photon, un électron passe du niveau d'énergie où il se trouve à un niveau d'énergie supérieur non occupé (état dit excité). L'énergie du photon absorbé est égale à la différence d'énergie entre le niveau initial et le niveau final. Déterminer l'expression de la plus grande longueur d'onde  $\lambda$  que la molécule puisse absorber en fonction du nombre  $p$  de motifs.
5. Évaluer  $\lambda$  pour  $p = 2, 3, 4$  et  $5$  puis comparer aux valeurs fournies sur le document ci-dessus. Le modèle utilisé est-il adapté ?

## Introduction à la mécanique quantique.

**Exercice 5 : Energie minimale et inégalité de Heisenberg.**

On considère une particule de matière dans un puit de potentiel infini de largeur  $L$ .

1. Exprimer la position moyenne et l'indétermination sur la position de la particule.
2. En déduire l'indétermination sur l'impulsion de la particule puis l'énergie minimale de cette particule dans le puit de potentiel infini.

On considère un atome d'hydrogène composé d'un proton  $p^+$  et d'un électron  $e^-$ .

3. Rappeler la force exercée par le proton sur l'électron ainsi que l'énergie potentielle associée à cette force en fonction de  $r$  la distance entre les deux particules. Exprimer l'énergie cinétique de l'électron en fonction de la quantité de mouvement  $p$ .
4. Ecrire le principe d'indétermination de Heisenberg. En identifiant l'indétermination et la valeur moyenne des grandeurs descriptive du système, obtenir une expression de l'énergie de l'électron en fonction uniquement de  $\langle r \rangle$  la valeur moyenne de  $r$ .
5. Déterminer alors l'expression de  $E_{\min}$  l'énergie minimale de l'électron ainsi que celle de  $\langle r \rangle_0$  valeur du rayon pour lequel cette énergie minimale est obtenue. Faire les A.N et commenter les résultats obtenus.

On considère maintenant une particule de matière soumise à une force de rappel élastique de constante de raideur  $k$  astreinte à se déplacer le long de l'axe (Ox) et pour laquelle la position d'équilibre est située en O.

6. Exprimer la force de rappel élastique exercée sur la particule ainsi que l'énergie potentielle associée en fonction de  $k$  et  $x$ . Exprimer l'énergie cinétique de la particule en fonction de la quantité de mouvement.
7. Ecrire le principe d'indétermination de Heisenberg. En identifiant l'indétermination et la valeur moyenne des grandeurs descriptive du système, obtenir une expression de l'énergie de l'électron en fonction uniquement de  $\langle x \rangle$  la valeur moyenne de  $x$ .
8. Déterminer alors l'expression de  $E_{\min}$  l'énergie minimale de la particule ainsi que celle de  $\langle x \rangle_0$  pour laquelle cette énergie minimale est obtenue.