

Introduction aux dimensions et unités.

1. Dimension d'une grandeur physique

1.1. Concept de dimension

Lorsque nous cherchons à décrire quantitativement un objet, par exemple un stylo, nous sommes amenés à réaliser des mesures. Cela nous donne accès à des **grandeurs physiques**, comme :

- le diamètre d du stylo ou sa longueur ℓ
- sa masse m ;
- la quantité de matière d'encre contenue n_e ;
- sa température T ;
- etc.

Chaque fois que l'on fait une mesure, cela revient à faire une **comparaison** entre une caractéristique de l'objet et une référence appelée **étalon**. Ainsi, lorsqu'on écrit $\ell = 12$ cm, on indique que le rapport entre la taille du stylo et celle d'un étalon de 1cm est égale à 12.

Ce même étalon de 1cm pourrait a priori aussi servir à faire la mesure du diamètre d du stylo, de l'épaisseur e d'un livre, du rayon r_T de la Terre (même si il semble peu adapté pour ce dernier cas) : les grandeurs d , e et r_T ont même **dimension**. Ce même étalon serait en revanche totalement inadapté pour la mesure de la masse m , qui a une dimension différente des grandeurs précédentes.

- **Définition** : on appelle **dimension** la nature physique d'une grandeur.

Remarque : Les grandeurs d , e et r_T du paragraphe précédent auraient tout aussi bien pu être mesurées à l'aide d'autres étalons : le décimètre (dm), le pied (unité anglo-saxonne notée ft). Ainsi les écritures $\ell = 1,2$ dm ou $\ell = 0,39$ ft pour exprimer la longueur du stylo sont tout aussi valables.

- **Notation** : on utilise la notation entre crochets pour exprimer la dimension d'une grandeur.

Par exemple :

« $[r_T] = L$ » signifie : la grandeur « r_T » (rayon de la Terre) a la dimension d'une longueur.

1.2. Les 7 dimensions fondamentales et les unités S.I.

Le **système international** (S.I.) fixait autrefois sept dimensions fondamentales et les sept unités associées (appelées unités S.I.) référencées dans le tableau ci-dessous. Toutes les autres dimensions se déduisaient de ces 7 dimensions fondamentales par produit ou division de ces dimensions.

Bien que l'approche ait été modifiée dans les dernières conventions de construction du S.I., on maintient le rôle de brique de base à ces sept unités pour toutes les considérations portant sur la dimension physique d'une grandeur mesurable.

Dimension	Symbole	Unité S.I.
Longueur	L	mètre (m)
Masse	M	kilogramme (kg)
Temps	T	seconde (s)
Température	Θ	kelvin (K)
Intensité électrique	I	ampère (A)
Quantité de matière	N	mole (mole)
Intensité lumineuse	J	candela (cd)

Pour trouver la dimension d'une grandeur physique quelconque, il suffit d'exploiter une des relations de son cours (on a souvent le choix), en suivant quelques principes très simples :

- si on a une relation physique de type produit « $C = A.B$ », alors la dimension de C est le produit des dimensions de A et de B. Ce principe peut s'écrire plus brièvement sous forme d'une « équation aux dimensions » : $[C] = [A].[B]$.
- la relation physique « $C = A + B$ » n'est possible que si A et B ont même dimension (et la grandeur C également). Ce principe peut s'écrire plus brièvement sous forme d'une « équation aux dimensions » : $[C] = [A] = [B]$.
- du point de vue dimensionnel, l'opération de dérivation se conçoit comme une simple division :

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow [v] = \frac{[x]}{[t]} = L.T^{-1}$$

Exercices d'application :

1. Proposer une relation permettant d'exprimer un volume « V ». En déduire la dimension d'un volume en fonction des dimensions fondamentales ?

On a la relation $V = L \times \ell \times H$.

On peut alors écrire : $[V] = L \times L \times L = L^3$

2. Proposer une relation permettant d'exprimer une concentration volumique « t ». En déduire la dimension d'une concentration massique en fonction des dimensions fondamentales ?

On a la relation $t = \frac{m}{v}$

On peut alors écrire : $[t] = \frac{[m]}{[v]}$ soit $[t] = \frac{M}{L \cdot T^{-1}} = M \cdot L^{-1} \cdot T$

3. Proposer une relation permettant d'exprimer une accélération « $\vec{a}$ ». En déduire la dimension d'une accélération en fonction des dimensions fondamentales ?

En terminale, on a vu que l'accélération $\vec{a}$ est définie ainsi :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$$

Le vecteur $\vec{OM}$ est le vecteur-position et a donc la dimension d'une longueur. On en déduit : $[a] = L \cdot T^{-2}$

Attention : du point de vue dimensionnel, un angle est parfois considéré comme sans dimension (un angle est défini en fait comme un rapport de longueurs) : $[\text{angle}] = \emptyset$

1.3. Evolution récente du SI : Les 7 constantes et les sept unités qu'elles définissent.

L'approche du CGPM (conférence générale des poids et mesures) pour définir le SI a connue des évolutions majeures dans les dernières années. Le but de ces évolutions était de retirer toute référence à des artefacts pour définir les étalons associés à chaque unité, et de construire entièrement le SI à partir de 7 constantes parmi celles qui sont apparues lors de la construction de la physique moderne afin de garantir :

- la pérennité de ce système d'unité. Les artefacts utilisés pour définir les unités dans les anciennes conventions du SI étaient en effet sujets au vieillissement. C'est ainsi par exemple que l'ancien étalon de masse définissant le kg depuis 1889 « perdait » en fait de la masse (50µg de perdu en moyenne par rapport aux copies officielles) par un processus lent mais qu'il est à l'heure actuelle parfaitement possible de mesurer. On ne pouvait donc pas conserver cet étalon qui n'en était plus un puisque sa masse change de manière observable.
- L'évolutivité de ce système d'unité. En basant le système SI sur ces constantes, on rend le système évolutif. Les valeurs numériques fournies dans le tableau ci-dessous sont celles qu'on peut proposer avec la précision maximale obtenue à l'heure actuelle. On peut imaginer que d'autres expériences de détermination des constantes se montrent encore plus précises à l'avenir. Dans ce cas, il suffira de modifier la valeur numérique de la constante mais ça ne changera rien à la définition du SI en lui-même.

Constante	Symbole	Valeur numérique	Unité	Lien avec les USI usuelles
Fréquence de la transition hyperfine du césium.	$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	$9,192631770 \cdot 10^9$	Hz	La seconde (s) correspond donc à $9,192631770 \cdot 10^9$ périodes de transition.
Vitesse de la lumière dans le vide.	c	$2,99792458 \cdot 10^8$	m.s ⁻¹	Le mètre (m) est la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant $1/2,99792458 \cdot 10^8$ s.
Constante de Planck. (Fondamentale)	h	$6,62607015 \cdot 10^{-34}$	J.s	Définit le (kg) puisque l'unité se réexprime en kg.m ² .s ⁻¹ .
Charge élémentaire.	e	$1,602176634 \cdot 10^{-19}$	C	L'ampère (A) correspond à un flux de charge de un coulomb par seconde.
Constante de Boltzmann	k	$1,380649 \cdot 10^{-23}$	J.K ⁻¹	Définit le Kelvin (K)
Constante d'Avogadro	N _A	$6,02214076 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹	Définit la mole (mol).
Efficacité lumineuse	K _{cd}	683	lm.W ⁻¹	Définit le candela (cd)

Ces nouvelles définitions sont indépendantes des méthodes de détermination des valeurs numériques, à l'exception de la transition hyperfine du Césium qui sert à la fois de définition et de support de la réalisation expérimentale d'horloge atomique.

Pour plus de détails sur tous ces sujets très actuels mais qui n'auront pas d'effets en pratique, on peut se rendre sur le site du bureau international des poids et mesures : <https://www.bipm.org/fr/home>.

2. L'analyse dimensionnelle, ou comment tirer profit de l'utilisation de grandeurs dimensionnées

2.1. Un outil de vérification

Le premier intérêt de l'analyse dimensionnelle est de pouvoir contrôler qu'une équation a des chances d'être juste. Deux règles d'or pour cela :

- les fonctions mathématiques (cosinus, sinus, exponentielle, etc.) doivent avoir pour argument un **nombre sans dimension**.
- les dimensions des deux membres d'une égalité (/des deux termes d'une addition) doivent être les mêmes : on dit alors que l'équation est **homogène**.

Exercices d'application :

Soit l'équation du pendule: $\theta(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t\right)$ où $\theta(t)$ représente la position angulaire de la masse, g le champ de pesanteur et ℓ la longueur du pendule.

1. Vérifier l'homogénéité de l'équation.

a) Vérification de l'argument du cosinus :

✓ dimension de g : on a les relations $F = mg$ et $F = ma$ qui conduisent à $[g] = [a] = L \cdot T^{-2}$

✓ dimension de l'argument du cosinus : $\left[\sqrt{\frac{g}{\ell}} t\right] = \left(\frac{L \cdot T^{-2}}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot T = T^{-1} \cdot T = 1$

Le cosinus a donc bien pour argument un nombre sans dimension

b) Vérification de l'homogénéité de l'équation :

L'énoncé ne donne aucune information sur la grandeur A . Mais l'homogénéité de l'équation étant une règle d'or qui doit être vérifiée, on peut donc affirmer que A est homogène à une longueur.

Après une série de calculs, un étudiant propose sur la copie l'expression suivante pour l'accélération d'un système : $a = \frac{v^2}{R^2}$ où v est une vitesse et R une longueur.

2. Que penser de ce résultat ?

Il s'agit là de vérifier l'homogénéité de l'équation en examinant chaque membre de l'égalité :

- à gauche : $[a] = L \cdot T^{-2}$ comme vu précédemment

- à droite : $\left[\frac{v^2}{R^2}\right] = \frac{[v]^2}{[R]^2} = \frac{(L \cdot T^{-1})^2}{L^2} = T^{-2}$

L'expression proposée par l'étudiant n'est pas homogène, elle est donc fautive !

3. Proposer une relation homogène permettant d'exprimer une accélération en fonction de la vitesse v et de la longueur R .

- à gauche : $[a] = L \cdot T^{-2}$

- à droite $[v]=L \cdot T^{-1}$ et $[R]=L$.

- On observe alors : $\left[\frac{v^2}{R}\right] = \frac{[v]^2}{[R]} = \frac{(L \cdot T^{-1})^2}{L} = L \cdot T^{-1}$

- On peut donc proposer : $a = \frac{v^2}{R}$

2.2. Un outil de prédiction

L'analyse dimensionnelle est aussi un moyen, dans une situation nouvelle (ou déjà vue mais un peu oubliée...) d'obtenir des renseignements non élémentaires sur un système physique.

Exercice d'application n°1 : dimensions de quelques grandeurs

Donner, en fonction des dimensions fondamentales, les dimensions des grandeurs suivantes :

1. une force F , | 2. une énergie E , | 3. une tension électrique U .

1. On s'appuie sur la définition de l'action de gravité à la surface de la Terre : $\vec{P} = m\vec{g}$ ce qui donne $[F] = [M][g]$

Avec la masse en kg et l'accélération de la pesanteur en $m \cdot s^{-2}$. Une force s'exprime en Newton $N \sim kg \cdot m \cdot s^{-2}$.

2. On s'appuie sur la définition de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$: ce qui donne $[E] = [M][V]^2 = ML^2T^{-2}$. Avec la masse en kg et la vitesse en $m \cdot s^{-1}$. Une énergie s'exprime en Joule $J \sim kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$.

3. La puissance fournie par un générateur électrique est le produit de la tension à ses bornes et de l'intensité électrique qu'il fournit : $P_{\text{Géné}} = U \cdot I$; ce qui donne $[P] = [U][I]$.

Avec la puissance en $W \sim J \cdot s^{-1} \sim kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$ et l'intensité en Ampère on obtient la tension en Volt $V \sim kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$.

Exercice d'application n°2 : dimension d'une grandeur inconnue

L'équation de la chaleur ci-dessous décrit la diffusion thermique d'une grandeur φ dans un milieu matériel. Elle a une importance historique.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

1. Déterminer la dimension du coefficient de diffusion D et proposer une unité pour cette grandeur.

On traduit cette équation en une équation aux dimensions : $\frac{[\varphi]}{[T]} = [D] \frac{[\varphi]}{[L]^2}$ ce qui donne $[D] = L^2 T^{-1}$

On obtient donc que le coefficient de diffusion s'exprime en $m^2 \cdot s^{-1}$.

Exercice d'application n°3 : homogénéité

Déterminer si les équations suivantes sont homogènes :

1. La position d'un proton (de charge e) le long d'un axe (Ox) dans un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\vec{u}_x$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$:

$$x(t) = \frac{eEt^2}{2} + v_0 t$$

On observe facilement que : $[x] = L$; $[v_0 t] = LT^{-1}T = L$

On rappelle que la force exercée sur une particule de charge e par un champ électrique $\vec{E}$ s'exprime $\vec{F} = e\vec{E}$ d'où l'analyse aux dimensions $\left[\frac{eEt^2}{2}\right] = [F]T^2 = MLT^{-2}T^2 = M \cdot L$

On en déduit que la relation n'est pas homogène, et on peut suggérer de la corriger en la réécrivant :

$$x(t) = \frac{eEt^2}{2m} + v_0 t$$

2. La troisième loi de Kepler dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon R , mettant en jeu la période T du mouvement, la masse M_S du Soleil et la constante gravitationnelle G :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

Dans cette relation on doit surtout déterminer l'unité de G . On rappelle l'expression de la force de gravitation universelle exercée entre deux corps de masse m_1 et m_2 distants de r_{12} : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{m_1 m_2 G}{r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ d'où l'équation aux dimensions : $[F] = M^2[G]L^{-2}$ avec $[F] = MLT^{-2}$ d'où $[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}$

On analyse alors la relation proposée : $\left[\frac{T^2}{R^3}\right] = T^2 L^{-3}$ et $\left[\frac{4\pi^2}{GM_S}\right] = [G]^{-1} M^{-1} = T^2 L^{-3}$, la relation proposée est bien homogène, on reconnaît d'ailleurs la troisième loi de Kepler.

Exercice d'application n°4 : une situation où l'analyse dimensionnelle est un outil de prédiction

On considère une voiture roulant à une vitesse v . Du fait de la présence d'air, elle subit une force $\vec{F}$ appelée force de trainée qui s'oppose à son mouvement.

On notera ρ la masse volumique de l'air et S la surface avant de la voiture qui « coupe » l'air. L'aérodynamisme est lié à la forme choisie par le constructeur lors de la conception du véhicule : il sera pris en compte par un coefficient de proportionnalité noté C (sans dimension).

1. Déterminer les dimensions de v, S, ρ et F en fonction des dimensions fondamentales.

Pour la vitesse, on peut écrire : $[v] = LT^{-1}$ pour l'aire $[S] = L^2$ pour la masse volumique $[\rho] = ML^{-3}$ et enfin pour la force $[F] = MLT^{-2}$ en se basant sur l'expression de l'action de gravité.

2. Par analyse dimensionnelle du problème, on cherche une expression pour la force de trainée F sous la forme $\frac{1}{2} C S^\alpha \rho^\beta v^\gamma$.

- a. Déterminer le système d'équations satisfait par α, β, γ .

Pour déterminer les valeurs des exposants, on exploite l'homogénéité de l'expression. Il faut pour cela que la dépendance de la force vis-à-vis des dimensions fondamentales se retrouve dans l'expression de cette force

$$\text{d'où } \begin{cases} 1 = \beta & \text{en référence à la masse} \\ 1 = 2\alpha - 3\beta + \gamma & \text{en référence à la longueur} \\ -2 = -\gamma & \text{en référence au temps} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

- b. En déduire l'expression de la force de trainée.

La norme de la force de trainée s'exprime alors : $\|F\| = \frac{1}{2} C S \rho v^2$ et la force s'exprime $\vec{F} = -\frac{1}{2} C S \rho \|\vec{v}\| \vec{v}$

Annexe : les préfixes multiplicatifs usuels sur les dimensions.

10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
femto (f)	pico (p)	nano (n)	micro (μ)	milli (m)	centi (c)	déci (d)
	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}	
	hecto (h)	kilo (k)	méga (M)	giga (G)	téra (T)	