Introduction aux dimensions et unités.

1. Dimension d'une grandeur physique

1.1. Concept de dimension

Lorsque nous cherchons à décrire quantitativement un objet, par exemple un stylo, nous sommes amenés à réaliser des mesures. Cela nous donne accès à des **grandeurs physiques**, comme :

- le diamètre d du stylo ou sa longueur ℓ
- sa masse m ;
- la quantité de matière d'encre contenue n_e ;
- sa température T ;
- etc.

Chaque fois que l'on fait une mesure, cela revient à faire une **comparaison** entre une caractéristique de l'objet et une référence appelée **étalon**. Ainsi, lorsqu'on écrit ℓ = 12 cm, on indique que le rapport entre la taille du stylo et celle d'un étalon de 1cm est égale à 12.

Ce même étalon de 1cm pourrait a priori aussi servir à faire la mesure du diamètre d du stylo, de l'épaisseur e d'un livre, du rayon r_T de la Terre (même si il semble peu adapté pour ce dernier cas) : les grandeurs d, e et r_T ont même **dimension**. Ce même étalon serait en revanche totalement inadapté pour la mesure de la masse m, qui a une dimension différente des grandeurs précédentes.

- **Définition : o**n appelle **dimension** la nature physique d'une grandeur.

Remarque : Les grandeurs d, e et r_T du paragraphe précédent auraient tout aussi bien pu être mesurées à l'aide d'autres étalons : le décimètre (dm), le pied (unité anglo-saxonne notée ft). Ainsi les écritures ℓ = 1,2 dm ou ℓ = 0,39 ft pour exprimer la longueur du stylo sont tout aussi valables.

- **Notation : o**n utilise la notation entre crochets pour exprimer la dimension d'une grandeur.

Par exemple :
« $[r_T]$ = L » signifie : la grandeur « r_T » (rayon de la Terre) a la dimension d'une longueur.

1.2. Les 7 dimensions fondamentales et les unités S.I.

Le **système international** (S.I.) fixait autrefois sept dimensions fondamentales et les sept unités associées (appelées unités S.I.) référencées dans le tableau ci-dessous. Toutes les autres dimensions se déduisaient de ces 7 dimensions fondamentales par produit ou division de ces dimensions.
Bien que l'approche ait été modifiée dans les dernières conventions de construction du S.I, on maintient le rôle de brique de base à ces sept unités pour toutes les considérations portant sur la dimension physique d'une grandeur mesurable.

Dimension	Symbole	Unité S.I.
Longueur	L	mètre (m)
Masse	M	kilogramme (kg)
Temps	T	seconde (s)
Température	Θ	kelvin (K)
Intensité électrique	I	ampère (A)
Quantité de matière	N	mole (mole)
Intensité lumineuse	J	candela (cd)

Pour trouver la dimension d'une grandeur physique quelconque, il suffit d'exploiter une des relations de son cours (on a souvent le choix), en suivant quelques principes très simples :

- si on a la relation physique de type produit « $C = A.B$ », alors la dimension de C est le produit des dimensions de A et de B. Ce principe peut s'écrire plus brièvement sous forme d'une « équation aux dimensions » : $[C] = [A].[B]$.
- la relation physique « C = A + B » n'est possible que si A et B ont même dimension (et la grandeur C également). Ce principe peut s'écrire plus brièvement sous forme d'une « équation aux dimensions » : [C] = [A] = [B].
- du point de vue dimensionnel, l'opération de dérivation se conçoit comme une simple division :

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow [v] = \frac{[x]}{[t]} = L.T^{-1}$$

Exercices d'application :

1. Proposer une relation permettant d'exprimer un volume « V ». En déduire la dimension d'un volume en fonction des dimensions fondamentales ?
2. Proposer une relation permettant d'exprimer une concentration volumique « t ». En déduire la dimension d'une concentration massique en fonction des dimensions fondamentales ?
3. Proposer une relation permettant d'exprimer une accélération « $\vec{a}$ ». En déduire la dimension d'une accélération en fonction des dimensions fondamentales ?

Attention : du point de vue dimensionnel, un angle est parfois considéré comme sans dimension (un angle est défini en fait comme un rapport de longueurs) : [angle] = Ø

1.3. Evolution récente du SII : Les 7 constantes et les sept unités qu'elles définissent.

L'approche du CGPM (conférence générale des poids et mesures) pour définir le SI a connue des évolutions majeures dans les dernières années. Le but de ces évolutions était de retirer toute référence à des artéfacts pour définir les étalons associés à chaque unité, et de construire entièrement le SI à partir de 7 constantes parmi celles qui sont apparues lors de la construction de la physique moderne afin de garantir :

- la pérennité de ce système d'unité. Les artéfacts utilisés pour définir les unités dans les anciennes conventions du SI étaient en effet sujets au vieillissement. C'est ainsi par exemple que l'ancien étalon de masse définissant le kg depuis 1889 « perdait » en fait de la masse (50µg de perdu en moyenne par rapport aux copies officielles) par un processus lent mais qu'il est à l'heure actuelle parfaitement possible de mesurer. On ne pouvait donc pas conserver cet étalon qui n'en était plus un puisque sa masse change de manière observable.
- L'évolutivité de ce système d'unité. En basant le système SI sur ces constantes, on rend le système évolutif. Les valeurs numériques fournies dans le tableau ci-dessous sont celles qu'on peut proposer avec la précision maximale obtenue à l'heure actuelle. On peut imaginer que d'autres expériences de détermination des constantes se montrent encore plus précises à l'avenir. Dans ce cas, il suffira de modifier la valeur numérique de la constante mais ça ne changera rien à la définition du SI en lui-même.

Constante	Symbole	Valeur numérique	Unité	Lien avec les USI usuelles
Fréquence de la transition hyperfine du césium.	$\Delta\nu_{Cs}$	$9{,}192631770.10^{9}$	Hz	La seconde (s) correspond donc à $9{,}192631770.10^{9}$ périodes de transition.
Vitesse de la lumière dans le vide.	c	$2{,}99792458.10^{8}$	$m.s^{-1}$	Le mètre (m) est la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant $1/2{,}99792458.10^{8}$ s.
Constante de Planck. (Fondamentale)	h	$6{,}62607015.10^{-34}$	J.s	Définit le (kg) puisque l'unité se réexprime en $kg.m^{2}.s^{-1}$.
Charge élémentaire.	e	$1{,}602176634.10^{-19}$	C	L'ampère (A) correspond à un flux de charge de un coulomb par seconde.
Constante de Boltzmann	k	$1{,}380649.10^{-23}$	$J.K^{-1}$	Définit le Kelvin (K)
Constante d'Avogadro	N_A	$6{,}02214076.10^{23}$	mol^{-1}	Définit la mole (mol).
Efficacité lumineuse	K_{cd}	683	$lm.W^{-1}$	Définit le candela (cd)

Ces nouvelles définitions sont indépendantes des méthodes de détermination des valeurs numériques, à l'exception de la transition hyperfine du Césium qui sert à la fois de définition et de support de la réalisation expérimentale d'horloge atomique.

Pour plus de détails sur tous ces sujets très actuels mais qui n'auront pas d'effets en pratique, on peut se rendre sur le site du bureau international des poids et mesures : **https://www.bipm.org/fr/home**.

2. L'analyse dimensionnelle, ou comment tirer profit de l'utilisation de grandeurs dimensionnées.

2.1. Un outil de vérification

Le premier intérêt de l'analyse dimensionnelle est de pouvoir contrôler qu'une équation a des chances d'être juste. Deux règles d'or pour cela :

- ➢ les fonctions mathématiques (cosinus, sinus, exponentielle, etc.) doivent avoir pour argument un **nombre sans dimension.**
- ➢ les dimensions des deux membres d'une égalité (/des deux termes d'une addition) doivent être les mêmes : on dit alors que l'équation est **homogène.**

Exercices d'application :

Soit l'équation du pendule: $\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)$ où θ(t) représente la position angulaire de la masse, *g* le champ de pesanteur et ℓ la longueur du pendule.

1. Vérifier l'homogénéité de l'équation.

Après une série de calculs, un étudiant propose sur la copie l'expression suivante pour l'accélération d'un système : $a = \frac{v^2}{R^2}$ où *v* est une vitesse et *R* une longueur.

2. Que penser de ce résultat ?
3. Proposer une relation homogène permettant d'exprimer une accélération en fonction de la vitesse v et de la longueur R.

2.2. Un outil de prédiction

L'analyse dimensionnelle est aussi un moyen, dans une situation nouvelle (ou déjà vue mais un peu oubliée…) d'obtenir des renseignements non élémentaires sur un système physique.

<u>Exercice d'application n°1 : dimensions de quelques grandeurs</u>

Donner, en fonction des dimensions fondamentales, les dimensions des grandeurs suivantes :

1. une force F,
2. une énergie E,
3. une tension électrique U.

<u>Exercice d'application n°2 : dimension d'une grandeur inconnue</u>

L'équation de la chaleur décrit la diffusion thermique d'une grandeur φ dans un milieu matériel. $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$

$\frac{\partial f}{\partial t}$ se lit comme la dérivée (partielle) de la fonction f par rapport au temps. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ se lit comme la dérivée seconde de la fonction f par rapport à la position x.

1. Déterminer la dimension du coefficient de diffusion D et proposer une unité pour cette grandeur.

<u>Exercice d'application n°3 : homogénéité</u>

Déterminer si les équations suivantes sont homogènes :

1. La position d'un proton (de charge e) le long d'un axe (Ox) dans un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\vec{u}_x$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\overrightarrow{u_x}$: $x(t) = \frac{eEt^2}{2} + v_0 t$
2. La troisième loi de Kepler dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon R, mettant en jeu la période T du mouvement, la masse M_S du Soleil et la constante gravitationnelle G : $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$

<u>Exercice d'application n°4 : une situation où l'analyse dimensionnelle est un outil de prédiction</u>

On considère une voiture roulant à une vitesse v. Du fait de la présence d'air, elle subit une force $\vec{F}$ appelée force de trainée qui s'oppose à son mouvement. On notera ρ la masse volumique de l'air et S la surface avant de la voiture qui « coupe » l'air. L'aérodynamisme est lié à la forme choisie par le constructeur lors de la conception du véhicule : il sera pris en compte par un coefficient de proportionnalité noté *C* (sans dimension).

1. Déterminer les dimensions de v, S, ρ et F en fonction des dimensions fondamentales.
2. Par analyse dimensionnelle du problème, on cherche une expression pour la force de trainée F sous la forme $\frac{1}{2}CS^\alpha\rho^\beta v^\gamma$.
   a. Déterminer le système d'équations satisfait par α, β, γ.
   b. En déduire l'expression de la force de trainée.

<u>Annexe : les préfixes multiplicatifs usuels sur les dimensions.</u>

10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
femto (f)	pico (p)	nano (n)	micro (µ)	milli (m)	centi (c)	déci (d)

10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}
hecto (h)	kilo (k)	méga (M)	giga (G)	téra (T)

Dimensions et unités

Exercice 1 : unités d'usage et lien avec les unités du système international.

Le système CGS (centimètre, gramme, seconde) est proposé par la British Association for the Advancement of Science en 1874. Il est utilisé en science jusqu'au milieu du XXe siècle. En 1946 le Comité international des poids et mesures approuve le système MKSA (mètre, kilogramme, seconde, ampère).

Le système CGS reste très utilisé dans certains domaines de la science. Par exemple, en conductimétrie, les constantes de cellules sont données en cm^{-1}. En spectroscopie infrarouge ou UV-visible, l'unité la plus couramment utilisée est également le cm^{-1}. Dans la classification périodique, les unités sont en gramme par mole (et non en kg/mol comme ce devrait être le cas dans le système MKS). Ce système est aussi beaucoup utilisé en astronomie où des flux s'expriment souvent en $erg/s/cm^2/Hz$, ou encore en gravimétrie.

1. Rappeler ou reconstruire l'équation aux dimensions de la grandeur physique force, et traduire l'unité de force dans les unités fondamentales du SI.

Dans le système CGS, l'unité de force s'appelle le dyne (dyn).

2. Etablir la conversion d'unité permettant de passer d'une valeur de force exprimée en dyne (dyn) à une valeur de force exprimée en newton (N).

Sur une facture E.D.F. on peut lire sa consommation d'énergie électrique exprimée en kWh (kilowatt-heure). Une installation de puissance 1 kW consomme une énergie de 1 kWh si elle est en fonctionnement pendant 1 heure.

3. Rappeler l'unité du SI d'énergie. Rappeler l'équation aux dimensions associée et traduire l'unité d'énergie dans les unités fondamentales du SI.
4. Etablir la conversion d'unité entre le Joule et le kWh.

La capacité thermique massique de l'eau notée c, prend la valeur $4{,}18 kJ.kg^{-1}.K^{-1}$, et le prix du kWh est de 12 centimes d'euro.

5. Evaluer le cout de la chauffe d'un litre d'eau pour la préparation du thé, pour une eau du robinet sortant à 15°C et une température de l'eau chaude de 90°C.

Exercice 2 : Grandeurs électromagnétiques.

La permittivité absolue du vide permet d'exprimer la norme de la force exercée par une particule de charge électrique q sur une autre particule de charge électrique Q selon la relation suivante : $\left\|\vec{F}_{el}\right\| = \frac{|qQ|}{4\pi\varepsilon_O}\frac{1}{r^2}$

1. Déterminer l'équation aux dimensions de la permittivité et en déduire son unité.

La perméabilité absolue du vide intervient dans l'expression de la norme de la force magnétique qui s'exerce entre deux fils conducteurs parallèles de longueur L, séparés d'une distance d et parcourus par les courants d'intensité i et I selon l'expression suivante : $\left\|\vec{F}_{mag}\right\| = \mu_O\frac{|iI|}{4\pi}\frac{1}{r}L$

2. Déterminer l'équation aux dimensions de la perméabilité et en déduire son unité.
3. Déterminer la dimension de la grandeur $\frac{1}{\sqrt{\mu_O\varepsilon_O}}$.
4. Faire l'application numérique pour $\varepsilon_O = \frac{1}{36\pi}10^{-9}USI$ et $\mu_O = 4\pi 10^{-7}USI$. Commenter.

Exercice 3 : Energie d'une explosion atomique.

La légende raconte que le physicien britannique Geoffrey Ingram Taylor (1886-1975) aurait pu en 1950, à l'aide d'un film et en utilisant l'analyse dimensionnelle, estimer l'énergie E dégagée par une explosion nucléaire, alors que cette information était classée top secret.

Le film permet d'avoir accès à l'évolution au cours du temps du rayon R(t) du nuage formé par l'explosion. Les grandeurs physiques influant sur ce rayon sont supposées être le temps t, l'énergie E et la masse volumique de l'air ρ.

1. Chercher une expression du rayon R sous la forme : $R = K_O E^{\alpha} t^{\beta} \rho^{\gamma}$ où K_O une constante sans dimension.

L'analyse du film montre que le rayon augmente au cours du temps proportionnellement à $t^{2/5}$.

2. Ce résultat concorde-t-il avec l'expression établie précédemment ?

À partir du film on a pu établir un tableau de valeurs donnant R en fonction de t.

3. Quelle courbe traceriez-vous pour justifier que R soit proportionnel à $t^{2/5}$?
4. En prenant K_O=1, et en relevant que le rayon R prend la valeur de 44m au bout de t = 1,5 ms, alors que la masse volumique de l'air prend la valeur numérique $1 kg.m^{-3}$, calculer la valeur de E en joule puis en kilotonne de TNT.

Donnée : 1 tonne de TNT libère $4{,}18.10^9$J. 1 kilotonne de TNT vaut 10^3 tonnes de TNT.