

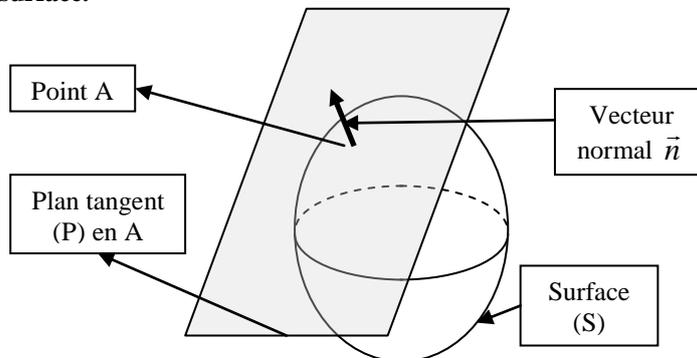
Réflexion et réfraction sur un dioptre.

1. Lois de Snell Descartes.

1.1. Quelques éléments de géométrie.

a. Plan tangent et normale à une surface.

On considère une surface (S) « régulière », c'est-à-dire ne présentant pas de « coins », prenant par exemple une coquille d'œuf, et prenons A un point de la surface. On peut voir le plan tangent (P) à la surface (S) en A comme le plan venant « toucher » la surface (S) en A sans qu'il n'y ait d'autres intersections entre (S) et (P).



Définition : Il existe alors une unique droite passant par A et perpendiculaire au plan (P) (c'est-à-dire perpendiculaire à toutes droites contenues dans le plan (P)). Cette droite est appelée **la normale en A à la surface (S)**.

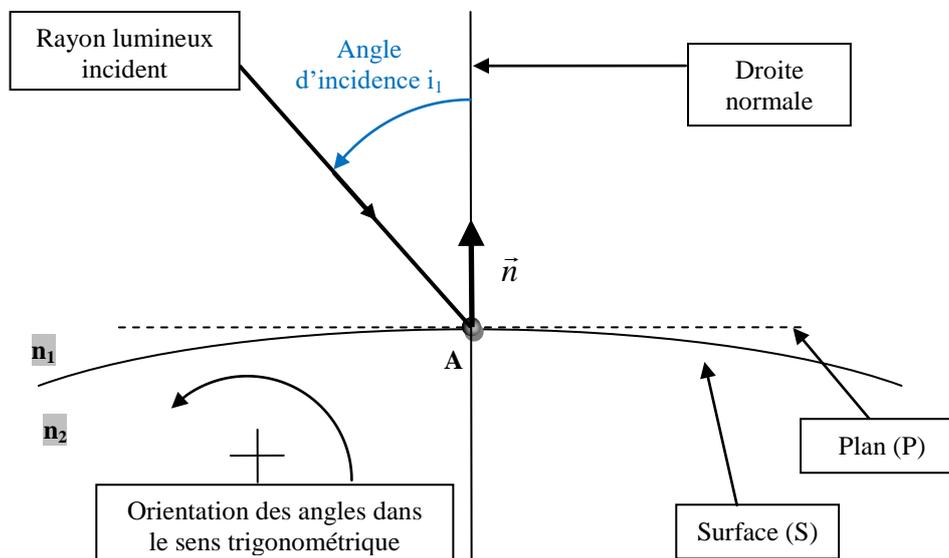
La normale est une droite, on peut donc la caractériser à l'aide d'un vecteur directeur \vec{n} qui prend alors le nom de vecteur normal à la surface (S) en A. Pour ce vecteur donnant la direction de la droite normale, il reste un choix sur le sens, sur l'illustration, on a choisi de prendre \vec{n} dans le sens « sortant » de la surface (S).

b. Plan d'incidence.

Sur cette géométrie, vient s'ajouter un rayon lumineux incident à la surface (S) en A.

Définition : On définit le plan d'incidence comme le plan contenant le rayon lumineux arrivant en A et la droite normale à la surface (S) en A.

On peut alors réduire la représentation du système à deux dimensions, en prenant comme plan de représentation le plan d'incidence comme sur l'illustration ci-dessous. La surface (S) sépare deux milieux d'indice optique n_1 et n_2 .



1.2. Énoncé des lois de Snell Descartes.

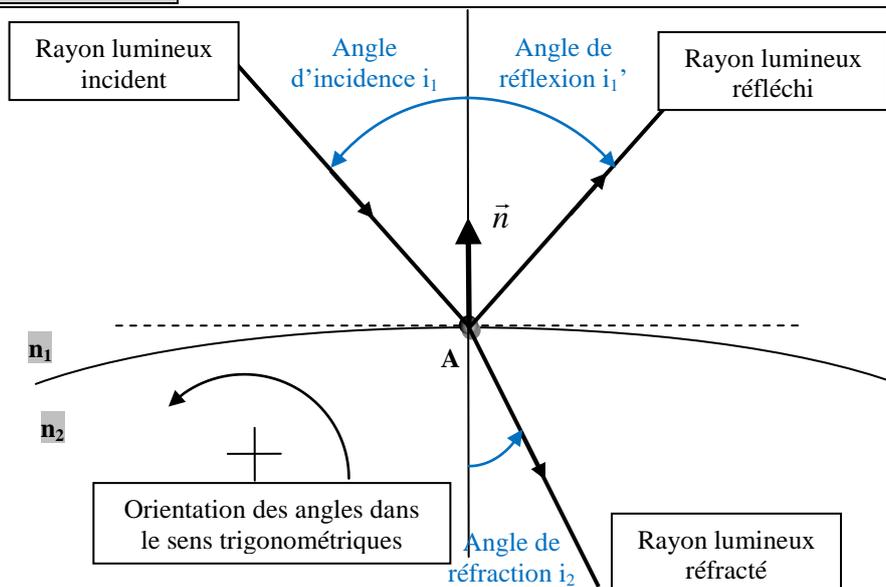
A l'interface entre deux milieux (1) d'indice optique n_1 et (2) d'indice optique n_2 , un rayon incident dans le milieu (1) donne en général naissance à un rayon réfléchi vers le milieu (1) et un rayon réfracté dans le milieu (2), encore appelé rayon transmis.

Les lois de Snell-Descartes pour la réflexion s'énoncent alors :

- ✓ Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence.
- ✓ Le rayon réfléchi est symétrique du rayon incident, autrement dit, l'angle de réflexion que fait le rayon réfléchi avec la normale à la surface est de même valeur absolue et de signe opposé. $\dot{i}_1' = -\dot{i}_1$

Les lois de Snell-Descartes pour la réfraction s'énoncent alors :

- ✓ Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence.
- ✓ L'angle de réfraction que fait le rayon réfracté avec la normale à la surface vérifie :
$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$



1.3. Application directe : angle limite de réfraction, phénomène de réflexion totale.

On observe que si on passe d'un milieu d'indice n_1 à un milieu d'indice n_2 tels que $n_2 > n_1$, (2) étant alors dit plus réfringent que (1), le rayon réfracté se rapproche de la normale au dioptre. C'est ce qu'on a voulu illustrer sur le schéma ci-dessus. Dans le sens inverse, si on passe d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent, le rayon réfracté s'éloigne de la normale à la surface.

- On voit alors qu'il y a une limite à ce processus, puisque l'angle de réfraction doit être compris dans l'intervalle $[-\pi/2; \pi/2]$. Il existe alors un angle d'incidence limite i_L au-delà duquel le rayon réfracté ne peut pas exister, on observe alors uniquement un rayon réfléchi.
- Pour déterminer l'angle d'incidence limite, on utilise les lois de Descartes sur la réfraction.

On suppose que $n_2 < n_1$ et on pose la limite de l'angle de réfraction $-\frac{\pi}{2} \leq i_2 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -1 \leq \sin i_2 \leq 1$

ce qui entraîne $-\frac{n_2}{n_1} \leq \sin i_1 \leq \frac{n_2}{n_1}$ par stricte croissance de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

- On pose alors i_L l'angle d'incidence limite défini par : $\sin i_L = \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow i_L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

Propriété : Lorsqu'on passe un dioptre dans le sens (1) vers (2) tel que $n_2 < n_1$, il existe un angle d'incidence limite i_L au-delà duquel la réfraction est impossible.

- On montre que cet angle d'incidence limite s'exprime par : $\sin i_L = \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow i_L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$
- Si l'angle d'incidence est inférieur à cette valeur limite, le rayon incident génère un rayon réfracté et un rayon réfléchi.
- **Si l'angle d'incidence est supérieur ou égal à cette valeur limite, le rayon incident ne génère qu'un rayon réfléchi, on parle alors de phénomène de réflexion totale.**

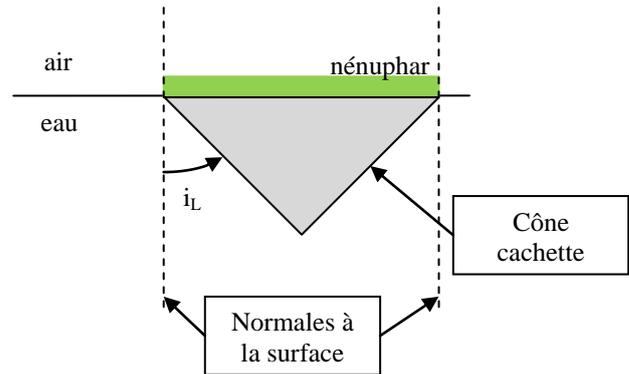
AD1 : les grenouilles maîtrisent les lois de Snell-Descartes !

Quand elles sentent le danger, certaines grenouilles plongent et se cachent sous un nénuphar. On modélise ce nénuphar par un cercle de rayon R flottant à la surface de l'eau dont on prendra l'indice optique comme étant égal à $n = 1,33$. On supposera que l'air est d'indice unitaire.

1. A l'aide d'un schéma, justifier que la région de l'espace qui délimite la « cachette parfaite » est un cône dont le nénuphar constitue la base et dont on déterminera le demi-angle au sommet i_L .
2. Déterminer la hauteur du cône. Faire l'application numérique pour un nénuphar de 10 cm de rayon.

Correction de l'AD1 :

1. On réalise un schéma vu de côté, dans un plan vertical avec le nénuphar posé sur la surface horizontale. Tout rayon issu du cône cachette arrive sur l'interface air-eau non obstruée par le nénuphar avec un angle d'incidence supérieur à l'angle limite i_L , il est donc totalement réfléchi. La grenouille cachée sous le nénuphar est donc cachée pour un observateur aérien.



2. Pour un nénuphar de rayon R , la hauteur h du cône est obtenu par la relation $h = R \tan i_L$

Pour exprimer i_L , on rappelle que l'angle réfracté ne peut pas dépasser $\pi/2$ et donc que la relation de Snell-Descartes impose : $n \sin i_{eau} = \sin i_{air} < 1$ le cas limite donnant $\sin i_L = 1/n$

On obtient alors : $h = R \tan i_L = \frac{R}{\sqrt{n^2 - 1}}$; A.N $h = 11,4\text{cm}$

1.4. Exemple d'application concrète : étude d'une fibre multimodale à saut d'indice.

Est-il besoin de signaler l'importance prise par la fibre optique dans le monde moderne des communications ?

- Même si son déploiement reste partiel, il est voué à être le mode de connexion internet de tous les foyers français d'ici à 2025.

<https://www.futura-sciences.com/tech/questions-reponses/internet-fibre-optique-deploiement-13330/>.

- La technologie fibre optique est toujours en évolution, on indique sur le schéma suivant, tiré d'un article très complet sur le sujet, les trois types de fibres à connaître pour sa culture générale.

<http://lamh.gmc.ulaval.ca/opus/physique534/optique/fibre01.shtml>

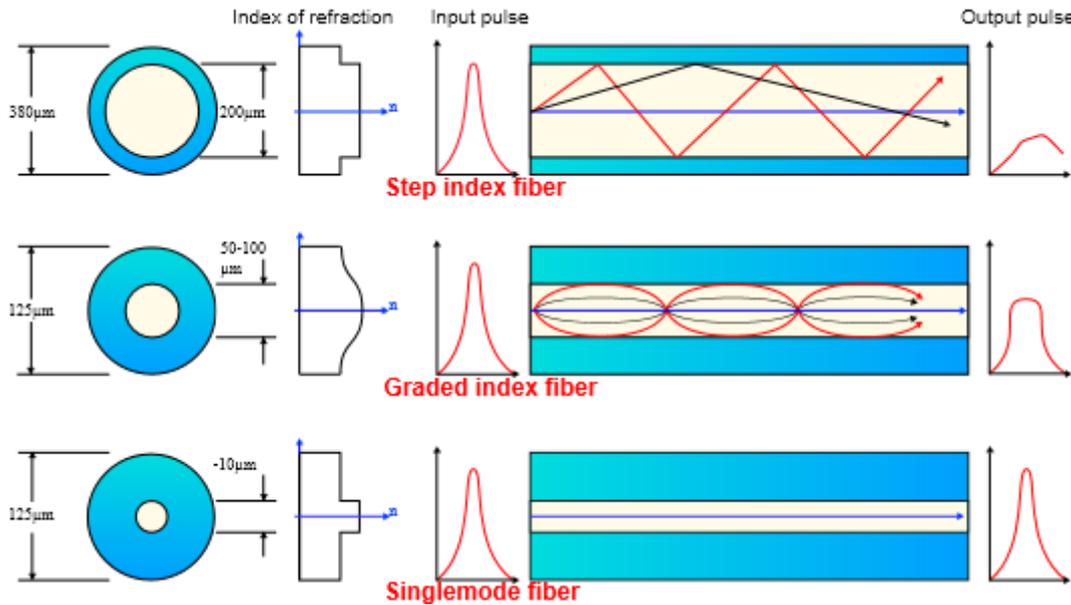
- ✓ La fibre à saut d'indice, appelée aussi fibre multimodale à saut d'indice, est celle que nous allons particulièrement étudier par la suite. Elle est composée d'une âme (ou cœur) en silice (c'est-à-dire du verre) dopée pour augmenter son indice optique, de rayon $a \approx 100\mu\text{m}$, dans laquelle la lumière est guidée en exploitant le phénomène de réflexion totale sur l'interface avec la gaine en silice pure dont l'indice optique est alors légèrement inférieur à celui de l'âme, de rayon $b \approx 200\mu\text{m}$. Le tout est en général entouré d'une gaine de protection en plastique simple. On notera le faible écart d'indice entre l'âme et la gaine. Les valeurs typiques qu'on utilisera par la suite sont : (pour l'âme ou cœur) $n_1 = 1,500$, (pour la gaine) $n_2 = 1,485$.
- ✓ La fibre à gradient d'indice est une évolution de la situation précédente, au lieu de faire varier brusquement l'indice entre une valeur d'âme et une valeur de gaine, on conçoit une fibre dont l'indice évolue de manière continue entre une valeur maximale au centre vers une valeur minimale à l'extérieur.

Comme l'illustre la figure ci-dessous la trajectoire de la lumière dans la fibre n'est plus alors un ensemble de segments rectilignes comme dans la fibre à saut d'indice, mais une ligne courbe, dont on peut démontrer qu'elle s'approche par un profil spatial de type sinusoïdal.

L'avantage principal de ce type de fibre est la plus faible dispersion (intermodale) de la lumière dans la fibre, également illustrée sur la figure : A partir d'une impulsion en entrée qui présente un même profil plutôt étroit, on observe en sortie de la même longueur de fibre que l'impulsion s'est étalée fortement dans le temps pour la fibre à saut d'indice alors qu'elle s'est faiblement étalée pour la fibre à gradient d'indice.

Ceci permet une plus faible distorsion de l'information numérique codée par des bits transmis physiquement par des impulsions lumineuses.

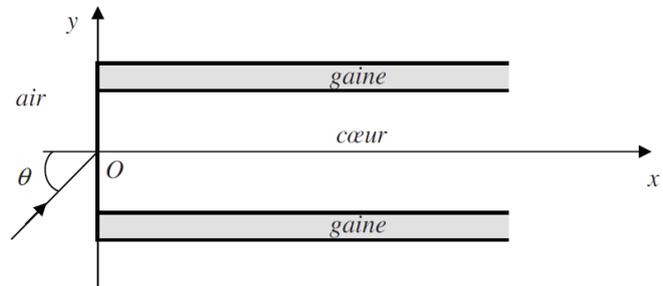
- Encore plus récemment, la fibre monomodale a été mise au point, elle reprend l'idée d'une constitution d'un canal guidant la lumière par saut d'indice entre une âme et une gaine, mais son âme présente un rayon beaucoup plus faible. La nature ondulatoire de la lumière, qui n'est pas au programme de première année, permet alors d'expliquer pourquoi le seul mode de transport de la lumière dans la fibre se fait selon l'axe de cette fibre sans aucune dispersion angulaire du faisceau lumineux transmis. Une seule trajectoire est alors possible dans la fibre monomodale et la dispersion « intermodale » est alors totalement annulée comme l'illustre le profil du « pulse » de sortie strictement identique au profil du « pulse » d'entrée.



Exercice d'application du cours sur la fibre à saut d'indice :

Revenons maintenant à l'étude de la fibre à saut d'indice. On souhaite étudier deux aspects particulièrement importants pour la mise en œuvre de cette fibre :

Tout d'abord, on va s'intéresser au problème de l'injection de la lumière dans la fibre. On note θ l'angle d'incidence d'un rayon lumineux provenant de l'air d'indice optique supposé unitaire $n_0=1,000$. On envisage sa réfraction dans l'âme (appelé aussi cœur) de la fibre d'indice optique $n_1=1,500$. On prendra pour indice optique de la gaine $n_2=1,485$.



1. Existe-t-il une condition sur l'angle d'incidence θ pour qu'un rayon réfracté soit produit dans le cœur de la fibre ?

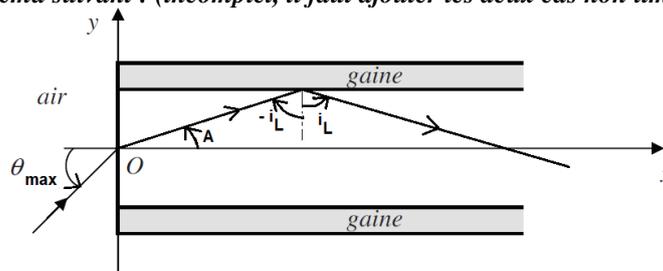
Puisqu'on passe d'un milieu d'indice n_0 à un milieu $n_1 > n_0$, il y a toujours un rayon réfracté sur le dioptre d'entrée de la fibre. Aucune condition n'est donc imposée sur l'angle d'incidence par la traversée de l'interface d'entrée de la fibre.

2. Pour que la lumière soit guidée dans la fibre, quel phénomène physique va-t-on exploiter ?

Pour que la lumière soit guidée dans la fibre, il faut qu'il n'y ait pas de perte lors de la propagation de la lumière dans la fibre. Il faut donc qu'au cours de la propagation, la lumière soit entièrement réfléchi sur le dioptre cœur/gaine à chaque fois que le rayon lumineux atteint l'interface entre ces deux milieux.

3. Construire alors un schéma avec des rayons lumineux en trait plein décrivant la situation limite entre la situation de guidage dans la fibre et la situation d'atténuation du faisceau au cours de sa propagation. Représenter en traits pointillés un exemple de situation de guidage et un exemple de situation de non guidage. Conclure qu'il existe une valeur maximale de l'angle θ qu'on notera θ_{max} en dessous de laquelle la lumière est guidée dans la fibre. Expliquer alors le nom de demi angle au sommet du cône d'acceptance de la fibre donné à cet angle θ_{max} .

On peut présenter le schéma suivant : (incomplet, il faut ajouter les deux cas non limite en pointillés)



Il existe donc une valeur maximale d'angle θ_{max} pour laquelle l'angle d'incidence sur l'interface cœur-gaine est l'angle limite permettant la réfraction i_L . Si $\theta < \theta_{max}$, $i > i_L$ et le rayon entièrement réfléchi se propage dans la fibre ; si $\theta > \theta_{max}$, $i < i_L$ et le rayon est partiellement réfracté, en multipliant les situations lors de la transmission

de la lumière dans la fibre, l'intensité du rayon lumineux diminue rapidement et le rayon fini par ne plus être transmis.

Le nom de $\frac{1}{2}$ angle au sommet du cône d'acceptance vient de l'allure de la zone dans laquelle sont situés les rayons admis dans la fibre qui présente l'allure d'un cône dont le sommet présente un angle $2\theta_{\max}$.

On définit l'ouverture numérique NA de la fibre optique comme étant le sinus de θ_{\max} .

4. Déterminer les expressions de θ_{\max} et de NA en fonction de n_0 , n_1 et n_2 . Faire les applications numériques.

On commence par étudier la condition de réflexion totale sur l'interface cœur-gaine. Il faut établir comme au paragraphe 1.3 que la condition de réflexion totale est $i < -i_L$ avec $\sin i_L = \frac{n_2}{n_1}$.

Dans le triangle rectangle, on obtient alors : $A + i_L + \frac{\pi}{2} = \pi$ et donc $A = \frac{\pi}{2} - i_L$

On exploite alors la loi de Snell-Descartes sur la face d'entrée de la fibre :

$$n_0 \sin \theta_{\max} = n_1 \sin A = n_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} - i_L \right) = n_1 \cos(i_L)$$

En exploitant : $\cos^2(i_L) + \sin^2(i_L) = 1$, on obtient $NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ et $\theta_{\max} = \arcsin \left(\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \right)$

Les applications numériques donnent : $NA = 0,21$ et $\theta_{\max} = 0,21 \text{ rad} = 12^\circ 13'$

On s'intéresse maintenant à la dispersion intermodale de cette fibre, c'est-à-dire à l'étalement temporel subi par une impulsion lumineuse entrant dans la fibre.

5. Décrire quel est le plus court chemin possible suivi par la lumière transmise le long de la fibre. Décrire également le plus long chemin. Déterminer alors la distance minimale d_{\min} et la distance maximale d_{\max} pour une fibre de longueur L.

Le plus court chemin possible pour aller de l'entrée à la sortie de la fibre est la ligne droite le long de l'axe de la fibre. Le chemin le plus long est celui constitué de segments tous inclinés d'un angle i_L par rapport à l'axe optique.

On en déduit que : $d_{\min} = L$ et que $d_{\max} = \frac{L}{\cos A} = \frac{L}{\sin i_L} = \frac{n_1}{n_2} L$

On considère une impulsion lumineuse très courte dont la durée est négligeable devant les autres temps caractéristiques du problème. On injecte cette impulsion lumineuse en entrée de la fibre de longueur L.

6. Montrer que cette impulsion va être étalée spatialement et temporellement au cours de sa propagation dans la fibre. Déterminer la largeur temporelle Δt de l'impulsion à la sortie de la fibre.

Fibre

Lors de la propagation, la partie du faisceau suivant l'axe de la fibre devra parcourir une distance plus faible et donc atteindra la sortie en premier tandis que la partie du faisceau incliné d'un angle θ_{\max} devra parcourir la distance la plus grande et arrivera donc en dernier. Les inclinaisons comprises entre les deux extrêmes mettront une durée intermédiaire entre les deux. Ainsi une impulsion de faible largeur temporelle en entrée se retrouvera étalée dans le temps après avoir parcourue une certaine distance dans la fibre. Elle se retrouvera également étalée dans l'espace le long de l'axe de la fibre.

Pour une fibre de longueur L : $t_{\min} = \frac{d_{\min}}{v_1} = \frac{n_1 L}{c}$; $t_{\max} = \frac{d_{\max}}{v_1} = \frac{n_1^2 L}{c n_2}$

ainsi $\Delta t = t_{\max} - t_{\min} = \frac{n_1 L}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right)$

On suppose maintenant qu'une impulsion correspond à un bit d'information.

7. Quelle est la durée minimale δt qui doit s'écouler entre l'envoi dans la fibre de longueur L de deux impulsions successives ? Quel est alors le débit maximal théorique D_{\max} de cette fibre ?

Il faut choisir un critère pour considérer que deux bits ne se recouvrent pas en sortie de la fibre et qu'il n'y a pas « mélange » des informations. On peut choisir que les deux sont distincts si le front du second bit arrive

après la queue du premier bit ce qui donne : $\delta t = \Delta t = \frac{n_1 L}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right)$

Le débit est alors le nombre de bit par seconde soit $D_{\max} = \frac{1}{\delta t} = \frac{c}{n_1 L} \left(\frac{n_2}{n_1 - n_2} \right)$

On trouve dans l'article suivant une référence de débit de $D=50\text{Mb/s}$ pour une fibre multimode à saut d'indice.
http://olivier.sigwarth.free.fr/CoursTS2/Cours%20Fibres%20Optiques/Fibres_Optiques.pdf

8. Quelle est la longueur maximale de la fibre utilisée dans le type d'installation décrit dans cet article ?
Commenter la valeur numérique obtenue.

Pour un débit D sans superposition de deux impulsions il faut que $L < L_{\max} = \frac{c}{n_1 D} \left(\frac{n_2}{n_1 - n_2} \right)$

L'application numérique donne : $L_{\max} = 396\text{m}$ Ce qui est une longueur trop faible pour que ce type de fibre soit mis en application à grande échelle avec ce type de débit.

9. Comment peut-on procéder pour transporter de l'information avec de plus grand débit sur de plus grande distance ?

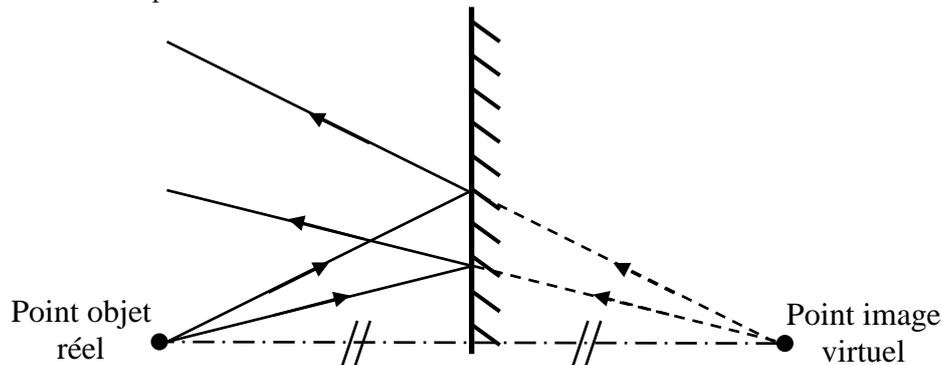
On peut d'abord proposer de changer de technologie de fibres... Puis parler des répéteurs placés le long des lignes de fibres... Enfin on peut parler du multiplexage (en longueur d'onde, en polarisation)...

2. Construction d'un point image.

Méthode : Pour construire le point image associé à un point objet à travers un système optique, on construit plusieurs rayons lumineux incidents passant par le point objet et les rayons lumineux associés émergeant du système optique. Le point image est alors à l'intersection des rayons lumineux émergeant.

2.1. Par réflexion sur un miroir plan. Stigmatisme rigoureux.

La réflexion sur un miroir plan suit les lois de Snell Descartes sur la réflexion.



miroir plan

- On constate tout d'abord que tous les rayons lumineux incidents passant par le point objet génèrent un rayon lumineux émergeant passant par un unique point qu'on désigne alors comme point image. On dit que le miroir plan est un système optique rigoureusement stigmatique pour n'importe quel couple de points.

Définition : Un système optique est dit **stigmatique** pour un couple de points A et A' si et seulement si A et A' sont conjugués par le système optique.

Formulation équivalente : Tout rayon lumineux incident sur le système optique passant par A , génère un rayon lumineux émergeant passant par A' .

- On constate également le résultat suivant à retenir : **Le point image par un miroir plan est le symétrique du point objet par le plan du miroir.**
- On constate également que les rayons lumineux émergeant ne se croisent pas réellement mais qu'il faut envisager leurs prolongements virtuels pour obtenir le point d'intersection désigné comme point image. **On dit alors que le point image est virtuel. Il ne peut pas être observé sur un écran de projection.**

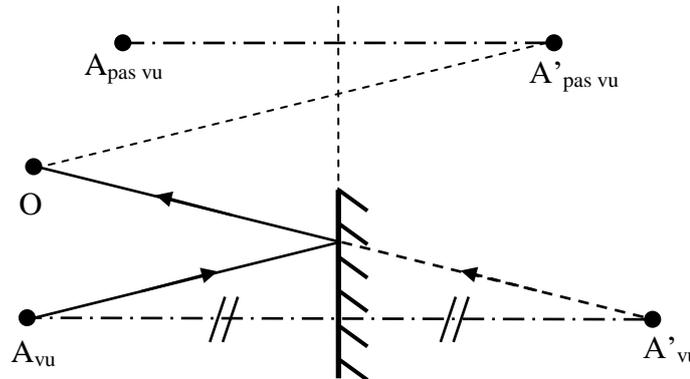
AD2 : miroir, mon beau miroir.

Les miroirs domestiques sont des lames de verre dont la face arrière, recouverte d'un dépôt métallique est une surface entièrement réfléchissante. On négligera l'épaisseur de verre et on supposera que la réflexion des rayons lumineux s'effectue directement sur le dépôt métallique.

1. A l'aide d'un schéma, montrer que l'on voit un point A dans un miroir si et seulement si la droite (OA') coupe la surface du miroir, avec A' l'image de A par le miroir plan et O la position de l'œil observateur.
2. En déduire la taille T minimale d'un miroir dans lequel un homme de taille h peut se voir en entier et déterminer la hauteur à laquelle doit se situer le bas du miroir.

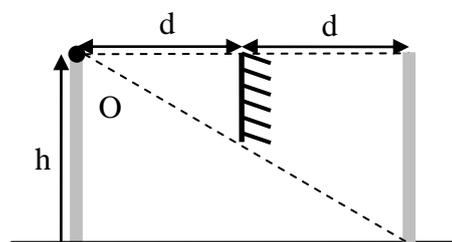
Corrigé de AD2 :

1. On peut proposer le schéma ci-dessous



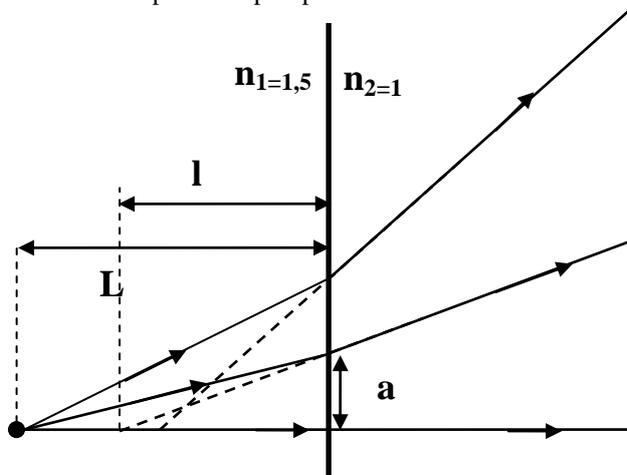
2. La zone observable par un homme de hauteur h, dont les yeux sont supposés être situés tout en haut est la suivante pour qu'il se voit entièrement dans le miroir.

On observe qu'il faut donc un miroir de taille minimale $T=h/2$ dont la ligne haute est située à une hauteur h.



2.2. Par réfraction à travers un dioptre plan. Stigmatisme approché.

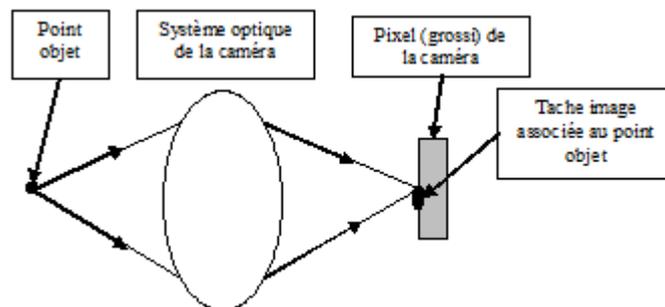
La réfraction par le dioptre plan suit les lois de Snell Descartes associés.



stig-dioptreplan

- On constate tout d'abord qu'il n'est pas possible d'identifier clairement un unique point image associé au point objet étudié.
- Cependant, si on limite la construction géométrique à des angles d'incidences faibles (de l'ordre de 10° en théorie), on peut déterminer une zone dans laquelle les rayons émergents se croisent. On parle alors de tache image associée à un point objet.

Pour finir la détermination de l'image par réfraction sur un dioptre plan, on doit considérer les caractéristiques des détecteurs optiques. Prenons l'exemple d'une caméra CCD dont chaque pixel présente une taille caractéristique de $10\mu\text{m}$ (valeur approchée pour les caméras les plus modernes).



- Tant que la tache image sur le détecteur reste de dimension plus faible que celle du pixel, on ne peut pas la distinguer d'un point image parfaitement ponctuel.
 - En conséquence, il n'est pas nécessaire qu'un système optique soit parfaitement stigmatique pour qu'on puisse définir un point image associé à un point objet mais il

suffit que la tache image autour de ce point image reste de dimension raisonnable. On parle alors de stigmatisme approché.

Définition : Un système optique est dit **stigmatique** au sens **approché** pour un couple de points A et A' si et seulement si les rayons lumineux issus de A passent au voisinage de A' après avoir traversé le système optique.

- Pour que le dioptre plan soit un système stigmatique au sens approché, il faut limiter la valeur prise par les angles d'incidence et de réfraction des rayons lumineux à des valeurs raisonnables, restant inférieures à 10° .

Position du point image par le dioptre plan lorsqu'on se place dans les conditions de stigmatisme approché.

- Dans le triangle dessiné par le dioptre plan, la normale au dioptre et le rayon lumineux considéré, on peut écrire les relations suivantes :

$$\frac{a}{L} = \tan(i_1) \quad \text{sachant qu'au petit angle } \tan(i_1) \approx i_1 \quad \text{on obtient} \quad \frac{a}{L} \approx i_1$$

$$\frac{a}{l} = \tan(i_2) \quad \text{sachant qu'au petit angle } \tan(i_2) \approx i_2 \quad \text{on obtient} \quad \frac{a}{l} \approx i_2$$

- On peut alors écrire la loi de Snell-Descartes reliant les valeurs des angles d'incidence et de réfraction : $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ Sachant qu'au petit angle $\sin(i_1) \approx i_1$ et $\sin(i_2) \approx i_2$ on obtient $n_1 i_1 \approx n_2 i_2$
- En associant ces trois relations, on obtient finalement que le point image est situé sur la normale au dioptre plan passant par le point objet avec : $l = \frac{n_2}{n_1} L$.
- Cette image est également virtuelle puisqu'elle est obtenue en prolongeant virtuellement les rayons lumineux émergeant du dioptre.

AD3 : profondeur apparente d'une piscine.

Un homme de 1,70m se tenant debout juste au bord d'un bassin regarde verticalement le fond de la piscine. Il est persuadé qu'il a pied et il estime la profondeur de la piscine à 1m50. On prendra pour indice optique de l'eau $n=1,3$, et on prendra un indice optique de l'air unitaire.

1. A-t-il réellement pied ?

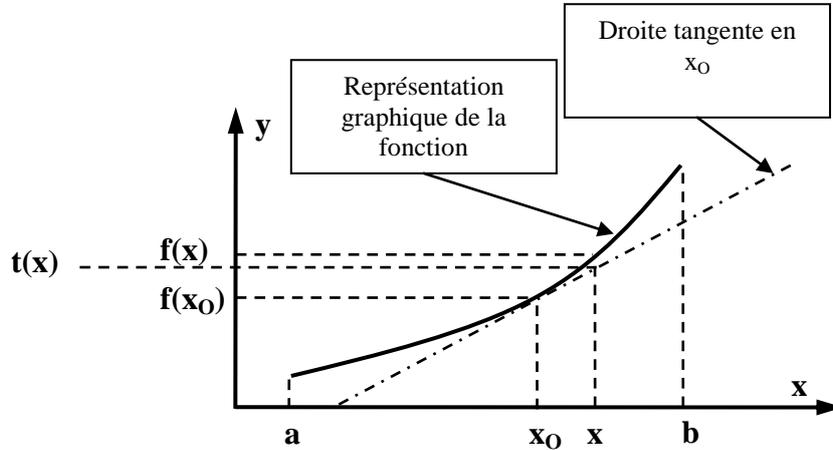
Capacités exigibles

- Définir le plan d'incidence.
- Énoncer et utiliser les lois de Snell-Descartes (avec des schémas !!!)
- Établir la condition de réflexion totale.
- Définir une convention d'orientation des angles et travailler avec des angles orientés.
- Savoir donner une estimation des valeurs des fonctions cosinus, sinus, et tangente par exploitation de l'équation de la droite tangente au point origine.
- Pour la fibre optique à saut d'indice : établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice.

Approximation linéaire d'une fonction au voisinage d'un point.

On considère une fonction mathématique f continue et dérivable sur un intervalle I . $f \Leftrightarrow \begin{cases} I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) \end{cases}$

La représentation graphique de la fonction et de sa droite tangente en un point est donnée sur le graphique ci-dessous :



On observe alors sur le graphique que la représentation graphique de la fonction et la tangente sont proches l'une de l'autre sur un domaine entourant la valeur x_0 . On en déduit que les valeurs prises par $f(x)$ au voisinage de x_0 sont proches de $t(x)$, qui est la fonction obtenue par l'équation de la tangente en x_0 .

L'équation de la tangente est donnée par :

- Une ordonnée $f(x_0)$ en x_0 .
- Une pente $\frac{df}{dx}(x_0)$.

On en déduit que :

$$t(x) = \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Conclusion :

Pour obtenir une approximation affine d'une fonction autour d'une valeur x_0 , on doit déterminer l'équation de la droite tangente à cette fonction en cette valeur.

On exploite alors la relation $f(x) \approx t(x) = \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Application aux fonctions trigonométriques en $x_0=0$:

- Pour la fonction cosinus : $\cos(x) \approx -\sin(x_0)(x - x_0) + \cos(x_0)$ d'où $\cos(x) \approx 1$
- Pour la fonction sinus : $\sin(x) \approx \cos(x_0)(x - x_0) + \sin(x_0)$ d'où $\sin(x) \approx x$
- Pour la fonction tangente : $\tan(x) \approx \frac{1}{\cos^2(x_0)}(x - x_0) + \tan(x_0)$ d'où $\tan(x) \approx x$