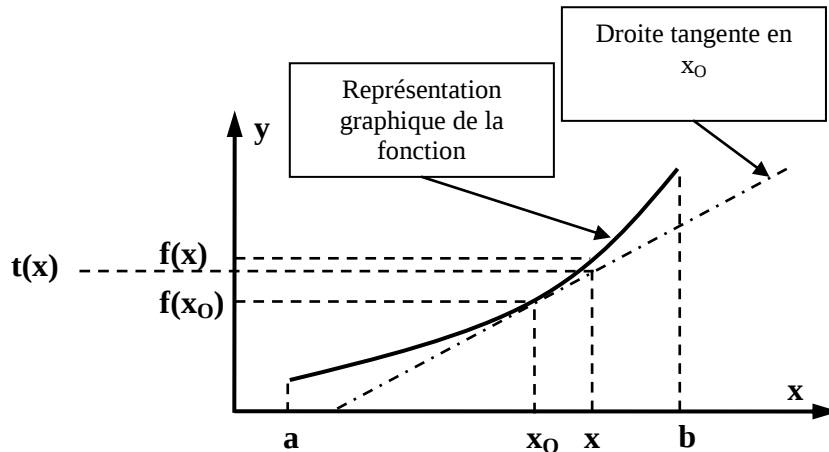


Approximation linéaire d'une fonction au voisinage d'un point.

On considère une fonction mathématique f continue et dérivable sur un intervalle I . $f \Leftrightarrow \begin{cases} I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) \end{cases}$

La représentation graphique de la fonction et de sa droite tangente en un point est donnée sur le graphique ci-dessous :



On observe alors que la représentation graphique de la fonction et la tangente sont proches l'une de l'autre sur un domaine entourant la valeur x_0 . On en déduit que les valeurs prises par $f(x)$ au voisinage de x_0 sont proches de $t(x)$, qui est la fonction obtenue par l'équation de la tangente en x_0 .

L'équation de la tangente est donnée par :

- Une ordonnée $f(x_0)$ en x_0 .
- Une pente $\frac{df}{dx}(x_0)$.

On en déduit que :

$$t(x) = \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Conclusion :

Pour obtenir une approximation affine d'une fonction autour d'une valeur x_0 , on doit déterminer l'équation de la droite tangente à cette fonction en cette valeur.

On exploite alors la relation $f(x) \simeq t(x) = \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Application aux fonctions trigonométriques en $x_0=0$:

- Pour la fonction cosinus : $\cos(x) \simeq -\sin(x_0)(x - x_0) + \cos(x_0)$ d'où $\cos(x) \simeq 1$
- Pour la fonction sinus : $\sin(x) \simeq \cos(x_0)(x - x_0) + \sin(x_0)$ d'où $\sin(x) \simeq x$
- Pour la fonction tangente : $\tan(x) \simeq \frac{1}{\cos^2(x_0)}(x - x_0) + \tan(x_0)$ d'où $\tan(x) \simeq x$