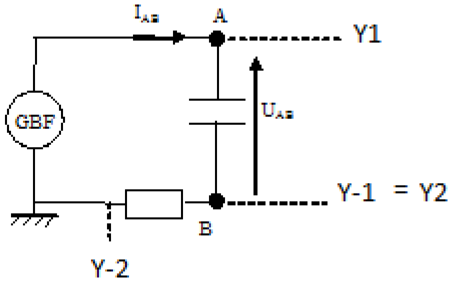
Etude des circuits linéaires du premier ordre.

1. Etude du circuit RC.

1.1. Etude expérimentale.

On réalise le circuit de la figure suivante où le GBF est supposé être un générateur idéal délivrant une tension créneau de valeur minimale 0V et de valeur maximale $E_O \approx 5$V.

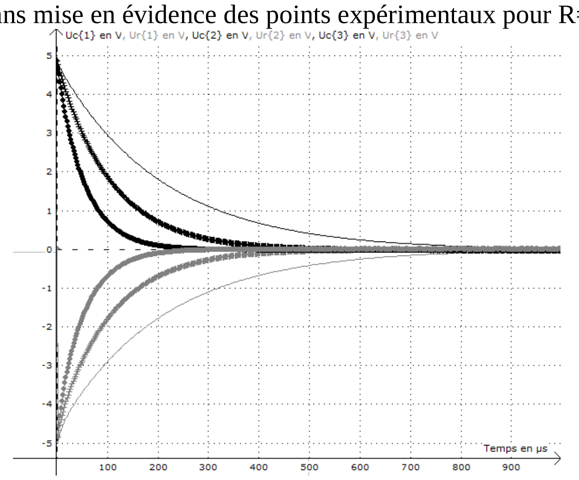


a. Régime libre.

On observe par acquisition sur l'ordinateur la réponse du circuit consécutive à un front descendant de la f.e.m délivrée par le GBF. On parle dans ce cas de régime libre.

Les courbes relevées à l'ordinateur sont les suivantes, U_C toujours en noir et U_R toujours en gris.

- Courbes continues avec points expérimentaux représentés par des ronds pour R=1,0kΩ et C=0 ,05µF.
- Courbes continues avec points expérimentaux représentés par des croix pour R=1,0kΩ et C=0 ,10µF.
- Courbes continues sans mise en évidence des points expérimentaux pour R=2,0kΩ et C=0 ,10µF.



On observe sur la courbe expérimentale relevée pour la tension U_C aux bornes du condensateur :

- Un régime transitoire se déroulant sur une durée Δt au cours duquel la tension aux bornes du condensateur décroit de manière continue de sa valeur avant basculement $U_C(t<0) = E_O$ à une valeur $U_{C\infty} = 0$ (en V).
- Un régime permanent pour lequel la tension aux bornes du condensateur reste fixe à la valeur $U_{C\infty} = 0$.

On modélise alors la courbe donnant l'évolution de $U_C(t)$ par la fonction exponentielle : $U_C(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, on obtient les valeurs suivantes pour les paramètres du modèle dans les différentes conditions :

- 1ier cas : R=1,0kΩ et C=0,05µF ; A = 4,86V et $\tau = 5{,}3.10^{-5}$s.
- 2ième cas : R=1,0kΩ et C=0,10µF ; A = 4,84V et $\tau = 1{,}06.10^{-4}$s.
- 3ième cas : R=2,0kΩ et C=0,10µF ; A = 4,83V et $\tau = 2{,}06.10^{-4}$s.

On observe sur la courbe expérimentale relevée pour la tension U_R aux bornes du conducteur ohmique :

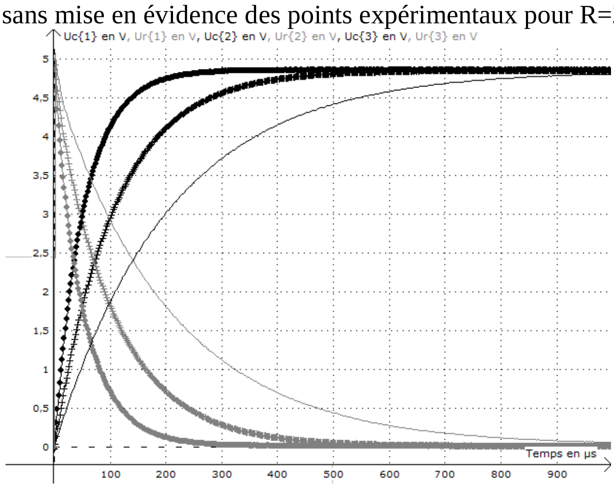
- Une bascule quasiment instantanée de la tension vers une valeur négative de l'ordre de –A alors qu'elle était nulle juste avant.
- Un régime transitoire se déroulant sur une durée Δt au cours duquel la tension aux bornes du conducteur ohmique croit de manière continue de la valeur -A à une valeur $U_{R\infty} = 0$ (en V).
- Un régime permanent pour lequel la tension U_R reste fixe à la valeur $U_{R\infty}$.

On modélise alors la courbe donnant l'évolution de $U_R(t)$ par la fonction exponentielle : $U_R(t) = B\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$, on obtient que $B \approx -A$ et $\tau' \approx \tau$.

b. Réponse à un échelon de tension.

On observe par acquisition sur l'ordinateur la réponse du circuit consécutive à un front montant de la f.e.m délivrée par le GBF. On parle dans ce cas de réponse à un échelon de tension.
Les courbes relevées à l'ordinateur sont les suivantes, U_C toujours en noir et U_R toujours en gris.

- Courbes continues avec points expérimentaux représentés par des ronds pour R=1,0kΩ et C=0 ,05µF.
- Courbes continues avec points expérimentaux représentés par des croix pour R=1,0kΩ et C=0 ,10µF.
- Courbes continues sans mise en évidence des points expérimentaux pour R=2,0kΩ et C=0 ,10µF.



On observe sur la courbe expérimentale relevée pour la tension U_C aux bornes du condensateur :

- Un régime transitoire se déroulant sur une durée Δt au cours duquel la tension aux bornes du condensateur croit de manière continue de sa valeur avant basculement $U_C(t<0) = 0$ à une valeur $U_{C\infty} \approx E_O$ (en V).
- Un régime permanent pour lequel la tension aux bornes du condensateur reste fixe à la valeur $U_{C\infty} \approx E_O$.

On modélise alors la courbe donnant l'évolution de $U_C(t)$ par : $U_C(t) = A - A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

On obtient les valeurs suivantes pour les paramètres du modèle dans les différentes conditions :

- 1^{ier} cas : R=1,0kΩ et C=0 ,05µF ; A = 4,87V et $\tau = 5{,}3.10^{-5}$s.
- $2^{ième}$ cas : R=1,0kΩ et C=0 ,10µF ; A = 4,88V et $\tau = 1{,}06.10^{-4}$s.
- $3^{ième}$ cas : R=2,0kΩ et C=0 ,10µF ; A = 4,84V et $\tau = 2{,}06.10^{-4}$s.

On observe sur la courbe expérimentale relevée pour la tension U_R aux bornes du conducteur ohmique :

- Une bascule quasiment instantanée de la tension vers une valeur de l'ordre de A alors qu'elle était nulle juste avant.
- Un régime transitoire se déroulant sur une durée Δt au cours duquel la tension aux bornes du conducteur ohmique décroit de manière continue de la valeur A à une valeur $U_{R\infty} = 0$ (en V).
- Un régime permanent pour lequel la tension U_R reste fixe à la valeur $U_{R\infty}$.

On modélise alors la courbe donnant l'évolution de $U_R(t)$ par la fonction exponentielle : $U_R(t) = B\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$, on obtient que $B \approx A$ et $\tau' \approx \tau$.

c. Conclusion sur ces observations.

Lorsqu'on soumet le circuit RC a une modification de la tension imposée à ses bornes :

- **La tension aux bornes du condensateur est continue lors du basculement de la valeur de la fem.**
- La tension aux bornes du conducteur ohmique et par conséquent l'intensité du courant présente un saut lors du basculement.
- Ces deux tensions évoluent alors vers un régime stationnaire pour lequel la fem du générateur se reporte entièrement aux bornes du condensateur, la tension aux bornes du conducteur ohmique et l'intensité du courant sont nulles.

- **La transition d'un état stationnaire à un autre s'effectue par la mise en place d'un régime transitoire dont la durée caractéristique τ augmente avec la valeur de la résistance R et avec la valeur de la capacité C.**

1.2. Réponse en régime libre du circuit RC.

a. Etablissement de l'équation différentielle.

On mène l'étude théorique de la première situation analysée précédemment expérimentalement.
A l'instant t = 0, on suppose que la fem du générateur bascule de la valeur E_O à la valeur 0.
Sur l'intervalle $t \in \left]0,+\infty\right[$, la loi des mailles pour ce circuit s'exprime : $0 = U_R(t) + U_C(t)$

On écrit alors les lois caractéristiques des composants : $U_R(t) = RI(t)$; $I(t) = \dfrac{dq}{dt}(t) = C\dfrac{dU_C}{dt}(t)$

On obtient l'équation différentielle qui régit le comportement du circuit RC : $0 = RC\dfrac{dU_C}{dt}(t) + U_C(t)$

On met cette équation sous forme canonique en introduisant le temps caractéristique : $\tau = RC$.

$$\frac{dU_C}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}U_C(t) = 0 \qquad \text{avec : } \tau = RC$$

b. Détermination de la solution à cette équation différentielle.

Expérimentalement, on a constaté que :

<u>Propriété</u> : La tension aux bornes d'un condensateur est une grandeur physique continue (en fonction du temps).

En théorie, la tension aux bornes du condensateur est proportionnelle à la charge portée par les armatures. Une évolution non continue de cette charge supposerait qu'un saut instantané peut être observé sur sa courbe d'évolution et mènerait à une intensité instantanée infinie dans le circuit ce qui est peu crédible physiquement.

On cherche donc les solutions de l'équation suivante : $\dfrac{dU_C}{dt}(t) + \dfrac{1}{\tau}U_C(t) = 0$ sur le domaine temporel t>0.

La condition initiale à respecter est : $U_C(t=0^+) = U_C(t=0^-) = E_O$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur.

- C'est une équation différentielle linéaire homogène à coefficient constant. Les solutions de cette équation s'écrivent sous la forme générale suivante : $f(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$.
- Pour achever la recherche de la solution, il faut déterminer la constante A. Pour cela, on traduit la condition initiale imposée : $U_C(t=0^+) = E_O = A$. On en déduit $E_O = A$.

<u>La solution finale s'exprime donc</u> : $\forall t \in \left]0,+\infty\right[\qquad U_C(t) = E_O\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) \qquad \tau = RC$

<u>L'intensité dans le circuit s'exprime alors</u> : $\forall t \in \left]0,+\infty\right[\qquad I(t) = C\dfrac{dU_C}{dt} = -\dfrac{E_O}{R}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

c. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux.

On retrouve dans l'étude théorique et dans l'étude expérimentale que :

- La tension aux bornes du condensateur est continue. Sa valeur en régime permanent est nulle.
- Le régime transitoire prend place sur un intervalle de temps de durée caractéristique τ qui prend la même valeur théoriquement et expérimentalement τ = R.C.

1.3. Réponse du circuit RC à un échelon de tension.

a. Etablissement de l'équation différentielle.

On mène à présent l'étude théorique de la seconde situation analysée précédemment expérimentalement.
A l'instant t = 0, on suppose que la fem du générateur bascule de la valeur 0 à la valeur E_O.
Sur l'intervalle $t \in \left]0,+\infty\right[$, la loi des mailles pour ce circuit s'exprime : $E_O = U_R(t) + U_C(t)$

On écrit les lois caractéristiques des composants : $U_R(t) = RI(t)$; $I(t) = \dfrac{dq}{dt}(t) = C\dfrac{dU_C}{dt}(t)$

On obtient l'équation différentielle qui régit le comportement du circuit RC : $E_O = RC\dfrac{dU_C}{dt}(t) + U_C(t)$

On met cette équation sous forme canonique en introduisant le temps caractéristique : $\tau = RC$.

$$\frac{dU_C}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}U_C(t) = \frac{E_O}{\tau} \qquad \text{avec : } \tau = RC$$

b. Détermination de la solution.

On cherche donc les solutions de l'équation suivante : $\frac{dU_C}{dt}(t)+\frac{1}{\tau}U_C(t)=\frac{E_O}{\tau}$ sur le domaine temporel t>0.

La condition initiale à respecter est : $U_C(t=0^+)=U_C(t=0^-)=0$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur.

- SPEC : on trouve facilement que : $S_C(t)=E_O$ est une SPEC.
- SGEH : On l'a déterminée précédemment pour le régime libre : $S_H(t)=A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$
- La solution générale est alors : $S_G(t)=S_C(t)+S_H(t)=E_O+A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

➢ On établit l'expression de A avec les conditions initiales : $E_O+A=0$

<u>La réponse à un échelon de tension du circuit RC est</u> : $\forall t\in\left]0,+\infty\right[\qquad U_C(t)=E_O\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$

<u>L'intensité dans le circuit s'exprime alors</u> : $\forall t\in\left]0,+\infty\right[\qquad I(t)=C\frac{dU_C}{dt}=\frac{E_O}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

c. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux.

On retrouve dans l'étude théorique et dans l'étude expérimentale que :

- La tension aux bornes du condensateur est continue. Sa valeur en régime permanent est E_O.
- Le régime transitoire prend place sur un intervalle de temps de durée caractéristique τ qui prend la même valeur théoriquement et expérimentalement τ = R.C.

1.4. Etude énergétique pour le circuit RC soumis à un échelon.

Reprenons la loi des mailles dans le circuit : $E_O=U_R(t)+U_C(t)$

Multiplions la loi des mailles par l'intensité dans le circuit : $\begin{array}{ccccc} E_O I(t) & = & U_R(t)I(t) & + & U_C(t)I(t) \\ P_{g\acute{e}n\acute{e}} & = & P_{Joule} & + & P_{stock}\end{array}$

On obtient alors un bilan de puissance dans le circuit étudié. La puissance fournie par le générateur est reçue par le conducteur ohmique et le condensateur.

La puissance instantanée fournie par le générateur s'exprime : $P_G(t)=E_O.I(t)=E_O.C\frac{dU_C}{dt}$

Et ainsi l'énergie fournie par le générateur pour passer de l'état initial à l'état final est $\mathrm{E}_G=\int_0^{+\infty}\left[CE_O\frac{dU_C}{dt}dt\right]=CE_O\left[U_C\right]_{t=0}^{t\to+\infty}=CE_O^2$, on constate que c'est une valeur finie.

D'après la relation vue dans le cours précédent l'énergie stockée dans le condensateur est nulle dans l'état initiale et s'exprime dans l'état final $E_{stock}=\frac{CE_O^2}{2}$

Le bilan énergétique permet alors de conclure que : $E_G=E_{Joule}+E_{stock}$ et permet d'exprimer l'énergie dissipée par effet Joule lors de la charge du condensateur : $E_{Joule}=E_G-E_{stock}=\frac{CE_O^2}{2}$

AD1 : Etude d'un circuit RC en série.

A l'instant $t=t_O$, on branche aux bornes d'un condensateur de capacité C=100nF, un générateur de Thévenin de fem e_O=5V et de résistance interne R=1kΩ.

1. Faire un schéma du circuit.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la charge q(t) portée par l'armature d'entrée du condensateur sur l'intervalle $\left[t_O,+\infty\right[$.

On a mesuré que juste avant de brancher le générateur, la charge portée par l'armature est q_O=100nC.

3. Déterminer l'expression de la charge q(t) sur l'intervalle $\left[t_O,+\infty\right[$.
4. Représenter la charge q(t) et définir le temps caractéristique associé à la charge du condensateur.
5. Déterminer l'intensité du courant i(t) dans le circuit.
6. Faire un bilan de puissance dans le circuit. Calculer l'énergie dissipée par effet Joule lors de la charge du condensateur.

2. Etude du circuit RL.

2.1. Réponse en régime libre du circuit RL.

a. Etablissement de l'équation différentielle.

A l'instant t = 0, on suppose que la fem du générateur bascule de la valeur E_O à la valeur 0.
Sur l'intervalle $t \in \left]0,+\infty\right[$, la loi des mailles pour ce circuit s'exprime : $0 = U_R(t) + U_L(t)$

On écrit alors les lois caractéristiques des composants $U_R(t) = RI(t)$; $U_L(t) = L\dfrac{dI}{dt}(t)$

On obtient l'équation différentielle qui régit le comportement du circuit RL : $L\dfrac{dI}{dt}(t) + RI(t) = 0$

On met cette équation sous forme canonique en introduisant le temps caractéristique du circuit : $\tau = L/R$.

$$\frac{dI}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}I(t) = 0 \qquad \text{avec : } \tau = L/R$$

b. Détermination de la solution.

Expérimentalement, on observe que la tension aux bornes du conducteur ohmique est continue lorsque le GBF effectue la bascule d'une f.e.m E_O à une fem nulle.

<u>Propriété</u> : L'intensité du courant traversant une bobine est une grandeur physique continue (en fonction du temps).

Pour l'expliquer théoriquement, on peut s'appuyer sur l'équivalence avec le cas du condensateur :

- L'intensité traversant le circuit contenant le condensateur est la dérivée de la tension aux bornes de celui-ci. On a vu qu'envisager un saut de tension était physiquement impossible.
- La tension aux bornes de la bobine est la dérivée de l'intensité la traversant. Ceci rendra également impossible l'observation d'un saut de l'intensité traversant la bobine, la tension à ses bornes serait alors infinie.

On cherche donc les solutions de l'équation suivante : $\dfrac{dI}{dt}(t) + \dfrac{1}{\tau}I(t) = 0$ sur le domaine temporel t>0.

La condition initiale à vérifier est : $I(t=0^+) = I(t=0^-) = \dfrac{E_O}{R}$ par continuité de l'intensité du courant traversant la bobine.

- C'est une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants. Les solutions de cette équation s'écrivent sous la forme générale suivante : $f(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$.
- Pour achever la recherche de la solution, il faut déterminer la constante A. Pour cela, on s'intéresse aux conditions initiales imposées aux circuits : $I(t=0^+) = \dfrac{E_O}{R} = A$. On en déduit $\dfrac{E_O}{R} = A$.

<u>La solution finale s'exprime donc</u> : $\forall t \in \left]0,+\infty\right[\qquad I(t) = \dfrac{E_O}{R}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

<u>La tension aux bornes de la bobine s'exprime alors</u> : $\forall t \in \left]0,+\infty\right[\qquad U_L(t) = L\dfrac{dI}{dt} = -E_O\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

2.2. Réponse du circuit RL à un échelon de tension.

a. Etablissement de l'équation différentielle.

On mène à présent l'étude théorique de la seconde situation analysée précédemment expérimentalement.
A l'instant t = 0, on suppose que la fem du générateur bascule de la valeur 0 à la valeur E_O.
Sur l'intervalle $t \in \left]0,+\infty\right[$, la loi des mailles pour ce circuit s'exprime : $E_O = U_R(t) + U_L(t)$

On écrit alors les lois caractéristiques des composants : $U_R(t) = RI(t)$; $U_L(t) = L\dfrac{dI}{dt}(t)$

On obtient l'équation différentielle qui régit le comportement du circuit RL : $\dfrac{dI}{dt}(t) + \dfrac{1}{\tau}I(t) = \dfrac{E_O}{L}$

On met cette équation sous forme canonique en introduisant le temps caractéristique du circuit : $\tau = L/R$.

$$\frac{dI}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}I(t) = \frac{E_O}{R\tau} \qquad \text{avec : } \tau = L/R$$

b. Détermination de la solution.

On cherche donc les solutions de l'équation suivante : $\frac{dI}{dt}(t)+\frac{1}{\tau}I(t)=\frac{E_O}{R\tau}$ sur le domaine temporel t>0.

La condition initiale à respecter est : $I(t=0^+)=I(t=0^-)=0$ par continuité de l'intensité traversant une bobine.

- SPEC : on trouve facilement que : $S_C(t)=\frac{E_O}{R}$ est une SPEC.
- SGEH : On l'a déterminée précédemment pour le régime libre : $S_H(t)=A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$
- La solution générale est alors : $S_G(t)=S_C(t)+S_H(t)=\frac{E_O}{R}+A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

➢ On établit l'expression de A avec les conditions initiales : $\frac{E_O}{R}+A=0$

<u>La réponse à un échelon de tension du circuit RL est</u> : $\forall t\in\left]0,+\infty\right[\qquad I(t)=\frac{E_O}{R}\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$

<u>La tension aux bornes de la bobine s'exprime alors</u> : $\forall t\in\left]0,+\infty\right[\qquad U_L(t)=L\frac{dI}{dt}=E_O\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

2.3. Etude énergétique pour le circuit RL soumis à un échelon.

Si on reprend la loi des mailles dans le circuit : $E_O=U_R(t)+U_L(t)$

Une même intensité circule dans tous les composants. Regardons alors ce qu'on obtient en multipliant la loi des mailles par cette intensité :

$$\begin{array}{ccccc} E_O I(t) & = & U_R(t)I(t) & + & U_L(t)I(t) \\ P_{géné} & = & P_J & + & P_{stock} \end{array}$$

La puissance instantanée fournie par le générateur s'écrit : $P_G(t)=E_O.I(t)$.

Puisque I(t) tend vers une valeur constante en régime permanent, il n'est pas vraiment possible de finaliser un bilan énergétique pour ce circuit

On peut cependant rappeler que l'énergie stockée dans la bobine est exprimable par la relation vue dans le cours précédent et indiquer ainsi que l'énergie stockée dans l'état initial est nulle et qu'elle s'exprime par la relation

$$E_{Stock}\to\frac{L}{2}I^2(t\to\infty)=\frac{L}{2}\left(\frac{E_O}{R}\right)^2$$

<u>Capacités exigibles</u>

- Distinguer graphiquement régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon.
- Déterminer les grandeurs électriques en régime permanent en remplaçant les bobines et les condensateurs par des interrupteurs fermés ou ouverts.
- Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles.
- Déterminer des conditions initiales en utilisant les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur et de l'intensité dans une bobine.
- Déterminer analytiquement la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon.
- Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire : graphiquement ou bien par analyse de la solution de l'équation différentielle.
- Réaliser des bilans énergétiques.

AD2 : Etude d'un circuit RL en parallèle.

A l'instant $t=t_O$, on branche aux bornes d'une bobine d'inductance L=100mH, un générateur de Norton d'intensité i_O et de résistance interne R=1kΩ.

1. Faire un schéma du circuit.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i_L(t)$ du courant circulant dans la bobine sur l'intervalle $[t_O,+\infty[$.

Aucun courant ne circulait dans la bobine avant que l'on branche le générateur à ses bornes.

3. Déterminer $i_L(t)$ dans la bobine sur l'intervalle $[t_O,+\infty[$.
4. Représenter l'intensité $i_L(t)$ sur l'intervalle $[t_O,+\infty[$
5. Déterminer la tension U(t) aux bornes de la bobine.
6. Faire un bilan de puissance. Calculer l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance sur l'intervalle $[t_O,+\infty[$.