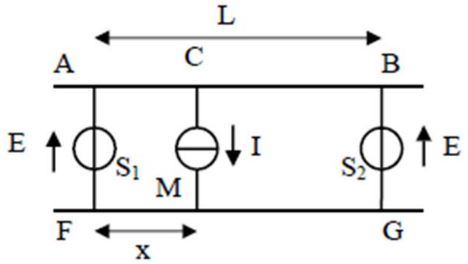
Problème 1 : Modélisation d'une locomotive électrique.

Longtemps après son démarrage, on peut supposer que le train étudié fonctionne en régime stationnaire. La puissance électrique nécessaire à son fonctionnement est fournie à la motrice à partir de sous-stations électriques implantées tout le long de la voie et espacées d'une distance L≈20km. Elles sont reliées par un fil conducteur, la caténaire, suspendu au-dessus des rails. La motrice reçoit l'alimentation de la caténaire par un contact glissant appelé pantographe sur son toit. Tous les moteurs électriques de la locomotrice sont montés en parallèle entre le pantographe et les rails qui servent de liaison masse à la Terre, conformément au schéma ci-dessous.



Les sous-stations électriques seront assimilées à des sources de tension idéales de f.é.m. E=1500V constante et identique pour toutes les sous-stations.
On admettra que les moteurs de la locomotive sont modélisables par une source idéale de courant, imposant un courant I constant orienté de la caténaire vers le sol.

Pour l'étude qui va suivre, on s'intéresse au trajet du train entre deux sous-stations S_1 et S_2. On supposera que la section transverse de la caténaire (surface transversale du fil) est de s_C = 1,47 cm^2. La caténaire est en cuivre, métal dont la conductivité est de σ_C=5, 82.10$^7\Omega^{-1}$m^{-1}. Le rail de section s_R=77,0cm^2 est constitué d'acier de conductivité σ_R=8,65.10$^6\Omega^{-1}$m^{-1}.

La résistance d'un conducteur ohmique de section s, de conductivité σ et de longueur l s'exprime $R = \frac{l}{\sigma S}$

1. Estimer r la résistance par unité de longueur de la caténaire et r_R la résistance par unité de longueur du rail. On fera donc l'application numérique et on réfléchira bien à l'unité de cette grandeur.

Dans la modélisation employée, les rails sont assimilés à un simple fil de résistance nulle.

2. Commenter la pertinence du modèle sur ce point.

On considère une section de ligne de longueur L alimentée par deux sous stations S_1 et S_2 et on néglige l'influence du reste de la ligne sur cette section. On note x=AC la longueur de caténaire reliant la sous station S_1 et le pantographe. On note U(x) la tension aux bornes de la motrice en convention récepteur.

3. Exprimer R_{AC} et R_{CB} en fonction de r, x et L.
4. En déduire les expressions de I_{AC} et de I_{BC} en fonction de E, U(x), r, x et L.
5. Obtenir finalement la tension U(x) aux bornes de la motrice en fonction de E, r, I, L et x.

On définit la chute de tension ΔU(x)=E-U(x) le long du trajet du train.

6. Montrer que la chute de tension est maximale en x=L/2. Exprimer alors cette chute de tension maximale et évaluer la numériquement pour une intensité de 500A.

On s'intéresse maintenant à la puissance électrique P_F fournie par les stations au chemin de fer.

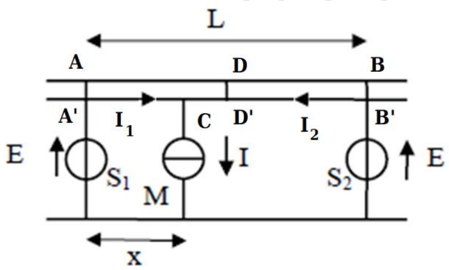
7. Exprimer la puissance électrique P_F fournie par les stations, la puissance P_m reçue par la motrice en x et la puissance P_J consommée par effet Joule dans la caténaire en fonction de E, I et U(x).
8. Vérifier que $P_F=P_m+P_J$ et commenter cette égalité.

On suppose que le train roule à vitesse constante v_O=100km.h^{-1}.

9. Exprimer la position x(t) du train en supposant qu'il est au point A à l'instant initial. Déterminer alors t_B l'instant auquel le train passe en B.
10. Exprimer alors l'énergie E_F fournie par les stations pour amener le train de A en B puis l'énergie E_m reçue par la locomotive sur son trajet de A en B.
11. Déterminer alors le rendement $\eta=E_m/E_F$ de cette alimentation électrique et faire l'application numérique.

Pour le TGV, l'alimentation électrique est faite avec un courant alternatif en 50Hz de tension efficace 25kV pour des intensités réduites à environ 200A. La caténaire présente alors une résistance par unité de longueur de 3.10$^{-4}\Omega$.m^{-1} et la longueur entre les deux stations d'alimentation est d'environ 60km.

12. Pouvez-vous expliquer pourquoi ce changement de technologie est intéressant ?



On envisage de modifier la configuration de la caténaire qui est maintenant constituée de deux fils en parallèle de résistance linéique r connectant les deux sous stations et le point situé au milieu de la section. Les connexions AA', BB' et DD' sont de résistance négligeable.

13. Montrer que les trois sections de fils AD, BD et B'D' peuvent être vue comme associées en parallèle. En déduire la résistance équivalente $R_{BD'}$.
14. Exprimer la résistance $R_{CD'}$ de la section de caténaire allant de C à D'.

15. Indiquer comment s'associent les résistances $R_{BD'}$ et $R_{CD'}$ pour relier les deux stations au point C et en déduire la résistance équivalente R_2.
16. En déduire l'expression de l'intensité I_2 qui traverse R_2 en fonction de E, U(x), r, L et x.
17. Déterminer l'intensité I_1 traversant la section de caténaire allant directement de A en C en fonction de E, U, r et x.
18. Montrer finalement que la chute de tension s'exprime dans cette seconde configuration sous la forme $\Delta U_{//} = \frac{rI}{2L}.x(2L-3x)$.
19. Déterminer la valeur maximale de $\Delta U_{//}$ et donner son expression puis évaluer la numériquement.
20. Comparer les deux installations et indiquer les avantages et les inconvénients de chacune d'elles.

Problème 2 : Gain de temps et économie d'énergie.

Le temps et l'énergie sont des biens précieux dont il faut savoir faire le meilleur usage, notamment dans le cadre de l'habitat. Il convient en particulier de réduire le délai de mise en température d'un logement et de limiter la consommation nécessaire à son chauffage. Quelques procédés en ce sens sont présentés dans ce problème, sous forme de questions indépendantes.

1) Modélisation sommaire

Dans un réseau électrique, la notion de résistance électrique R traduit une relation de proportionnalité entre la différence de potentiel V existant entre deux points du circuit électrique et le courant I qui circule de l'un à l'autre.
Par analogie, dans un réseau thermique, on définit la résistance thermique R_{th} en fonction de la différence de température $\Delta\theta$ existant entre deux systèmes et le flux thermique Φ_R qui circule de l'un à l'autre (c'est-à-dire la quantité d'énergie thermique échangée par unité de temps).

1. Ecrire la relation s'inspirant de la loi d'Ohm entre $\Delta\theta$, R_{th} et Φ_R.

Dans un réseau électrique, la notion de capacité électrique C traduit une relation de proportionnalité entre la dérivée temporelle dV/dt et le courant I lié à la modification de la charge d'un condensateur dont l'une des armatures est fixée au potentiel V et l'autre est maintenue à un potentiel de référence nul.

2. Par analogie, dans un réseau thermique, définir la notion de capacité thermique C_{th} en fonction de la dérivée temporelle $d\theta/dt$ et du flux thermique Φ_C.

Le schéma électrique proposé (Figure 1) est l'image d'un système thermique élémentaire qui permet de fixer globalement les idées concernant le comportement thermique d'un habitat. L'ensemble des radiateurs, alimentés par la chaudière, est assimilé à une source de courant. Pour simplifier, dans toutes les questions qui suivent, la température extérieure θ_e sera toujours supposée constante ; ainsi le milieu extérieur sera assimilé à une source de tension continue. La température $\theta(t)$ de l'habitat sera supposée uniforme dans tout son volume et la capacité thermique totale de celui-ci sera notée C_{th}. Entre l'habitat et l'extérieur est représentée la résistance thermique globale R_{th} de l'isolation (Mur, fenêtres etc… pris en compte).
La référence de température sera prise ici égale à 0°C ; par analogie avec une référence de potentiel nul, on pourra la représenter par le symbole d'une "masse" dans un réseau électrique.

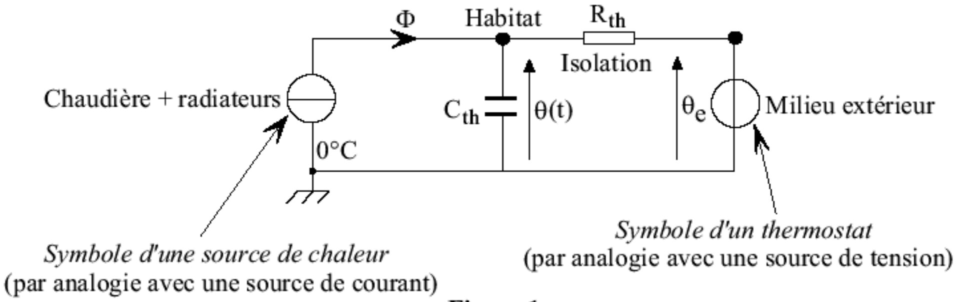


Figure 1

3. Quelle loi de l'électrocinétique appliquée au réseau électrique équivalent traduit le bilan en terme de flux thermique de l'habitat ainsi représenté ? Ecrire ce bilan.
4. Lorsque le régime permanent est atteint pour une température constante θ_c, expliquer ce que devient la branche contenant la capacité $C_{th.}$ En déduire en fonction de θ_e, θ_c et R_{th} le flux thermique Φ_O nécessaire au maintien de la température. Faire l'A.N pour θ_e = 5°C ; θ_c = 20°C et R_{th} = 2,5mK/W.

2) Mise en température.

Dans toute la suite de ce problème, on posera : $\tau_O = R_{th}C_{th}$. La température initiale de l'habitat étant supposée égale à la température extérieure, on met celui-ci en chauffe au temps t = 0 s, en imposant un échelon de flux égal à Φ_O.

5. Reprendre le bilan thermique dans cette configuration et déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en faisant apparaître τ_O et θ_c.
6. Déterminer l'évolution de la température $\theta(t)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
7. Exprimer le temps $t_{95\%}$ nécessaire pour que la température atteinte diffère de la température de consigne de moins de 5% de la différence initiale. On exploitera la relation suivante $(\theta(t_{95\%}) - \theta_c) = 0{,}05*(\theta_e - \theta_c)$. Faire l'application numérique avec C_{th} = 3 MJ/K.

Ce temps pouvant être jugé trop important, on peut accélérer la mise en température en augmentant la puissance de chauffe au démarrage puis en la réduisant progressivement de manière à ne jamais dépasser la consigne choisie.

Démarrage forcé.

Dans la mesure où la chaudière est apte à fournir, par exemple, une puissance transitoire dix fois supérieure au flux Φ_O qui s'impose en régime établi, on peut programmer une puissance de chauffe selon la loi : $\Phi_1(t) = \Phi_O\left(1+9e^{-t/\tau}\right)$, laquelle tend vers la valeur nominale Φ_O au bout d'un temps de l'ordre de 5τ.

8. Ecrire l'équation bilan résultant du bilan thermique en introduisant τ_O et θ_C.

Pour la résoudre, il faut reprendre la démarche usuelle :

9. Donner la solution générale de l'équation homogène associée.
10. Mener la recherche de solution particulière de l'équation complète en l'écrivant sous la forme $S_P(t) = C + Be^{-\frac{t}{\tau}}$. On précisera alors les expressions de C et B en fonction de θ_C, θ_e, τ et τ_O.
11. Ecrire alors la solution générale de l'équation complète, et déterminer l'expression finale de $\theta(t)$ en exploitant les conditions initiales.
12. Montrer que l'on peut choisir pour le paramètre τ une valeur particulière à préciser qui permet d'annuler la composante originelle du régime transitoire. Exprimer alors la température $\theta(t)$ et déterminer la nouvelle valeur $t_{95\%}$' du temps pour lequel $(\theta(t_{95\%}') - \theta_c) = 0{,}05*(\theta_e - \theta_c)$. Faire l'application numérique.