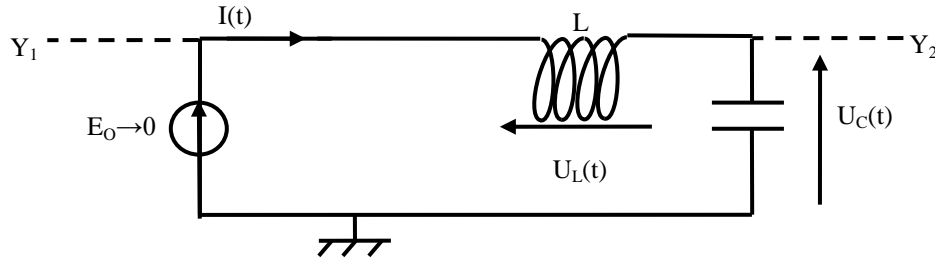


Oscillateurs en régime transitoire.

1. Oscillateurs harmoniques.

1.1. Exemple en électrocinétique : le circuit LC.

On envisage le circuit suivant où on suppose qu'un générateur de tension idéal délivre une tension de valeur $E_0=5V$ jusqu'à l'instant $t=0$ où il bascule à une tension délivrée nulle. Le circuit LC est alors en régime libre.



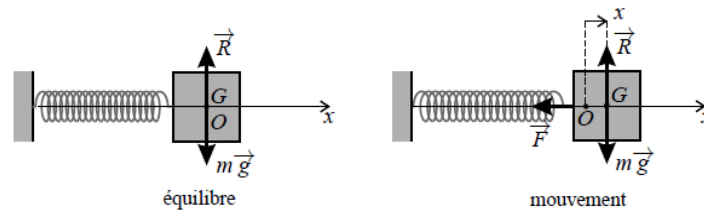
Loi des mailles pour ce circuit sur l'intervalle de temps $t \in]0, +\infty[$: $0 = U_L(t) + U_C(t)$

On écrit alors les lois de comportement pour la bobine et le condensateur : $U_L(t) = L \frac{dI}{dt}(t)$; $I(t) = C \frac{dU_C}{dt}(t)$

On obtient alors l'équation différentielle suivante : $0 = LC \frac{d^2 U_C}{dt^2}(t) + U_C(t)$

Forme canonique : $\frac{d^2 U_C}{dt^2}(t) + \omega_0^2 U_C(t) = 0$ avec la pulsation propre: $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$

1.2. Exemple en mécanique : le système masse-ressort.



On considère un objet de masse m relié à un point O par un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k . La masse est astreinte à se déplacer sur un axe horizontal (par exemple, à l'aide d'une liaison glissière).

- On mène l'étude dans le **référentiel terrestre local supposé galiléen.**
- On place l'origine spatiale en O position d'équilibre de la masse le long de (Ox) .
- On choisit une base de projection cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec \vec{e}_x vecteur unitaire de l'axe (Ox) , \vec{e}_z vertical vers le haut.

Bilan des forces s'appliquant sur la masse :

La force de rappel élastique : $\vec{F}_{el} = -k(l - l_0)\vec{u} = -kx\vec{e}_x$

La force de gravité : $\vec{P} = m\vec{g}$

La réaction du support supposé sans frottement et ne présentant donc pas de composante dans la direction du mouvement : $\vec{R} = R_z\vec{e}_z + R_y\vec{e}_y$

On applique la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$$\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_{el} + \vec{R}$$

On projette selon la direction \vec{e}_x : $m\ddot{l} = -k(l - l_0)$

ce qui se traduit par : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ou on introduit la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

On obtient comme équation du mouvement, **l'équation de l'oscillateur harmonique.**

1.3. Solution du problème de l'oscillateur harmonique (OH) en régime libre.

a. Solution générale de l'équation de l'OH en régime libre.

On cherche tout d'abord la solution générale de l'équation de l'OH $\frac{d^2 S}{dt^2}(t) + \omega_0^2 \cdot S(t) = 0$.

On peut vérifier facilement que les fonctions $\cos(\omega_0 t)$ et $\sin(\omega_0 t)$ sont des solutions.

Conclusion : L'équation différentielle de l'OH est linéaire, à coefficient constant, homogène, du second ordre. Dans ce cas, la famille des solutions de cette équation s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de deux solutions indépendantes :

$$S_G(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)$$

b. Solution du problème étudié.

Pour poser le problème complet, il faut alors donner deux conditions indépendantes permettant de déterminer les paramètres (A, φ_0) et (A_1, A_2) .

Exemple 1 : Pour le circuit (LC), on peut supposer que le circuit a d'abord atteint un régime stationnaire pour l'intervalle de temps $t < 0$, auquel cas, la tension aux bornes du condensateur vérifie :

$$\triangleright U_C(t = 0^+) = U_C(t = 0^-) = E_0; \quad \frac{dU_C}{dt}(t = 0^+) = \frac{dU_C}{dt}(t = 0^-) = \frac{i}{C}(t = 0^-) = 0$$

Ces conditions initiales se traduisent par :

$$\begin{cases} S(t = 0) = A \cos(\varphi_0) = A_1 = E_0 \\ \frac{dS}{dt}(t = 0) = -A\omega_0 \sin(\varphi_0) = A_2\omega_0 = 0 \end{cases};$$

On obtient finalement : $U_C(t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$

Exemple 2 : Pour le système masse-ressort, on impose comme conditions initiales, une masse située à l'origine et lancée avec une vitesse v_0 dans la direction et le sens de (Ox) .

$$\triangleright x(t = 0^+) = x(t = 0^-) = 0; \quad \frac{dx}{dt}(t = 0^+) = \frac{dx}{dt}(t = 0^-) = v_0$$

Ces conditions initiales se traduisent par :

$$\begin{cases} S(t = 0) = A \cos(\varphi_0) = A_1 = 0 \\ \frac{dS}{dt}(t = 0) = -A\omega_0 \sin(\varphi_0) = A_2\omega_0 = v_0 \end{cases};$$

On obtient finalement : $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$

Exemple 3 : cas général : $S(t = 0) = S_0$; $\dot{S}(t = 0) = \dot{S}_0$

On obtient alors : $S(t = 0) = A \cos \varphi_0 = A_1 = S_0$; $\dot{S}(t = 0) = -\omega_0 A \sin \varphi_0 = \omega_0 A_2 = \dot{S}_0$

La solution au problème est : $S(t) = S_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{S}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) = \sqrt{S_0^2 + \frac{\dot{S}_0^2}{\omega_0^2}} \cos\left(\omega_0 t - \arctan\left(\frac{\dot{S}_0}{\omega_0 S_0}\right)\right)$.

1.4. Ecritures et graphique d'une fonction sinusoïdale.

a. Deux écritures d'une même fonction.

Une fonction sinusoïdale de pulsation ω peut s'écrire :

$$1. \quad f(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) \qquad 2. \quad f(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

\triangleright A est l'amplitude, elle est de même dimension que le paramètre physique dont l'évolution est donnée par $f(t)$.

\triangleright φ_0 est la phase à l'origine, $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0 = \omega(t - t_0)$ est la phase à l'instant t. Les phases s'expriment en radians (rad). t_0 est le retard temporel du signal par rapport au signal sinusoïdal de référence présentant un maximum à l'instant initial $t=0$. t_0 s'exprime en seconde (s).

\triangleright ω est la pulsation exprimée en radian par seconde ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) reliée à la fréquence f exprimée en (Hz)

$$\text{et à la période T exprimée en seconde par : } \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

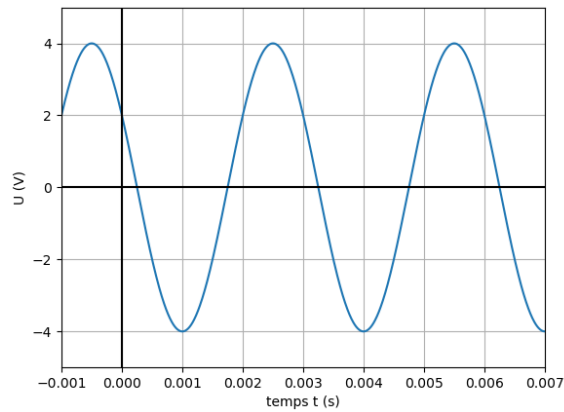
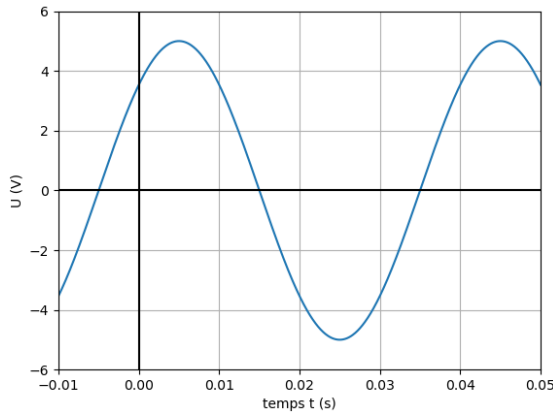
Il existe des liens entre ces deux formes pour qu'elles expriment la même fonction sinusoïdale, on les retrouve facilement par le raisonnement suivant :

$$\text{En } t=0 : \begin{cases} f(t=0) = A_1 = A \cos(\varphi_0) \\ f'(t=0) = \omega A_2 = -A\omega \sin(\varphi_0) \end{cases} \text{ ce qui donne } \begin{cases} A_1 = A \cos(\varphi_0) \\ A_2 = -A \sin(\varphi_0) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \\ \tan(\varphi_0) = -\frac{A_2}{A_1} \end{cases}$$

b. Graphique d'une fonction sinusoïdale du temps et lecture.

Pour les fonctions sinusoïdales représentées ci-dessous en fonction du temps t :

1. Déterminer les valeurs numériques de A, T et t₀ par lecture graphique.
2. En déduire les valeurs de f, ω et φ₀.
3. Le signal est-il en avance ou en retard de phase par rapport au signal de référence présentant un maximum en t=0 ?



1.5. Bilan énergétique sur le fonctionnement du circuit LC.

On reprend l'équation de structure du circuit LC série, c'est-à-dire la loi des mailles : $0 = U_L(t) + U_C(t)$

On peut alors tout multiplier par l'intensité dans le circuit : $0 = i(t)U_L(t) + i(t)U_C(t)$

Ainsi on obtient le bilan de puissance dans le circuit : $0 = P_L(t) + P_C(t) = \frac{d}{dt}(E_L + E_C)$

La puissance totale reçue à chaque instant par le circuit est nulle. On en déduit que l'énergie stockée dans le circuit est constante.

Exprimons les deux énergies à l'instant t : $E_C(t) = \frac{C}{2} E_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$; $E_L(t) = \frac{L}{2} \omega_0^2 E_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{C}{2} E_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$

- La solution mathématique du problème amène bien à une énergie stockée dans le circuit constante égale à $E_C(t) + E_L(t) = \frac{C}{2} E_0^2$
- Cette énergie est échangée continuellement entre le condensateur et la bobine
 $E_C\left(k\frac{T}{2}\right) = \frac{C}{2} E_0^2$; $E_L\left(k\frac{T}{2}\right) = 0$ et $E_C\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{T}{2}\right) = 0$; $E_L\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{T}{2}\right) = \frac{C}{2} E_0^2$
- Elle est équi-répartie en moyenne entre le condensateur et la bobine : $\langle E_C(t) \rangle_T = \langle E_L(t) \rangle_T = \frac{C}{4} E_0^2$

2. Oscillateurs amortis.

En pratique, un oscillateur harmonique présente toujours un mécanisme d'amortissement. Pour les circuits électrocinétiques, il s'agit par exemple des pertes par effet Joule.

2.1. Exemple en électrocinétique : le circuit RLC.

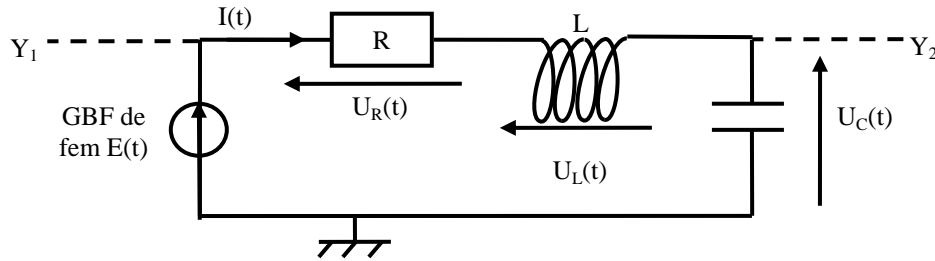
a. Montage expérimental.

On réalise le montage correspondant à la figure suivante où le GBF est supposé être un générateur de tension idéal délivrant une tension crête à crête de valeur minimale 0V et de valeur maximale $E_0 = 5V$.

On emploie une boîte à décade pour conducteur ohmique de résistance variable R', la bobine présente une résistance $r = 10 \Omega$ qui s'associe en série avec celle de la boîte à décade, la résistance totale sera donc $R = R' + r$.

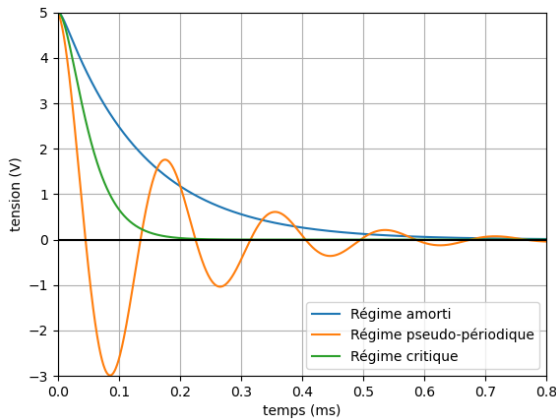
La bobine présente une inductance $L = 80 \text{ mH}$, le condensateur présente une capacité $C = 10 \text{ nF}$.

Pour étudier le régime libre, on observe d'abord à l'oscilloscope puis par acquisition à l'ordinateur la réponse en tension aux bornes du condensateur après un front descendant de la tension délivrée par le GBF.



b. Allure de la réponse expérimentale en régime libre.

Avec le montage expérimental réalisé, on peut étudier la réponse en régime libre lorsque le GBF réalise la transition d'une valeur de tension délivrée E_0 à une valeur nulle. Pour cela, il faut que le temps caractéristique d'établissement du régime permanent soit plus petit qu'un demi période du signal créneau.



On observe trois type de comportements :

- Lorsque l'amortissement est faible, la réponse du circuit présente des oscillations pseudo-périodiques de pseudopériode T avec un temps d'atténuation de l'amplitude τ . On parle de réponse pseudo-périodique.
- Lorsque l'amortissement est fort, la réponse du circuit est une décroissance lente de la tension. On parle de régime amorti
- Lorsque l'amortissement prend une valeur particulière, la décroissance est rapide mais sans mise en place de pseudo-oscillation. On parle alors de régime critique.

c. Mise en équation pour l'étude du régime libre.

Loi des mailles pour ce circuit sur l'intervalle de temps $t \in]0, +\infty[$: $0 = U_R(t) + U_L(t) + U_C(t)$

On écrit alors les lois de comportement pour le conducteur ohmique, la bobine et le condensateur :

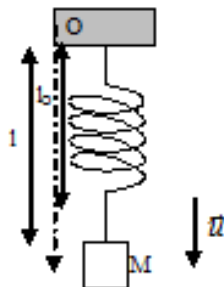
$$U_R(t) = RI(t) ; U_L(t) = L \frac{dI}{dt}(t) ; I(t) = C \frac{dU_C}{dt}(t)$$

On obtient alors l'équation différentielle suivante : $0 = RC \frac{dU_C}{dt}(t) + LC \frac{d^2U_C}{dt^2}(t) + U_C(t)$

$$\text{Forme canonique : } \frac{d^2U_C}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dU_C}{dt}(t) + \omega_0^2 U_C(t) = 0$$

$$\text{avec la pulsation propre } \omega_0 = (LC)^{-1/2} \text{ et le facteur de qualité } Q = \frac{1}{R} \left(\frac{L}{C} \right)^{1/2}$$

2.2. Un exemple en mécanique : le sismographe.



On considère un point matériel de masse m relié à l'aide d'une ressort à un point fixe du bâti d'un sismographe. On suppose qu'il existe une force de frottement visqueux s'appliquant sur le point matériel.

On suppose que le mouvement du bâti $z_O(t)$ est connu.

Liste des forces s'appliquant sur la masse :

La force de rappel élastique : $\vec{F}_{el} = -k(l - l_0)\vec{u}$

La force de gravité : $\vec{P} = m\vec{g}$

La force de frottement linéaire : $\vec{F}_f = -\lambda\vec{v}_{M/R}$

On choisit une base de projection cartésienne telle que \vec{e}_z soit vertical vers le haut et pour origine spatiale la position moyenne du point O.

Principe fondamental de la dynamique sur la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\left(\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt} \right)_R = \vec{P} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_f$$

On projette alors sur la direction verticale : $m \cdot \ddot{z}(t) = -mg + k(z_O(t) - z(t) - l_0) - \lambda \dot{z}(t)$

On commence par étudier la position d'équilibre pour laquelle la somme des forces sur la masse est nulle en absence de mouvement du bâti $z_o(t) = 0$. $z_{eq} = -\frac{mg}{k} - l_o$. On introduit alors la nouvelle variable $Z = z - z_{eq}$.

L'équation du mouvement vérifiée par $Z(t)$ est alors : $m\ddot{Z} + \lambda\dot{Z} + kZ = k.z_o(t)$

$$\text{Forme canonique : } \ddot{Z} + \frac{\omega_o}{Q} \dot{Z} + \omega_o^2 Z = \omega_o^2 z_o(t)$$

$$\text{avec la pulsation propre } \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et le facteur de qualité } Q = \frac{1}{\lambda} \sqrt{km}$$

2.3. Détermination de la solution en régime libre.

a. Recherche de la solution générale de l'équation homogène.

On mène donc la recherche de solution pour l'équation différentielle linéaire homogène à coefficient constant

$$\text{d'ordre 2 suivante : } \frac{d^2 S}{dt^2}(t) + \frac{\omega_o}{Q} \frac{dS}{dt}(t) + \omega_o^2 S(t) = 0$$

On mène la recherche de solutions en la supposant de la forme : $S_H(t) = \exp(rt)$

L'équation différentielle se traduit alors en une équation caractéristique qui est un polynôme d'ordre deux pour

$$\text{le paramètre introduit } r : r^2 + \frac{\omega_o}{Q} r + \omega_o^2 = 0$$

Les valeurs de r correspondant à des solutions de l'équation différentielle s'identifient alors avec les racines de ce polynôme.

$$\text{Les racines s'expriment différemment selon la valeur du discriminant } \Delta = \omega_o^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$$

- $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$ les racines sont positives.

$$\text{Si } Q < 1/2 : S_H(t) = A_1 \exp(r_1 t) + A_2 \exp(r_2 t) \text{ avec : } r_1 = -\frac{\omega_o}{2} \left(\frac{1}{Q} + \sqrt{Q^{-2} - 4} \right) \text{ et } r_2 = -\frac{\omega_o}{2} \left(\frac{1}{Q} - \sqrt{Q^{-2} - 4} \right)$$

- $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$ on obtient une racine double : $r = -\omega_o$.

$$\text{Si } Q = 1/2 : S_H(t) = (A_1 + A_2 t) \exp(-\omega_o t)$$

- $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$ les racines sont : $r_1 = -\frac{\omega_o}{2} \left(\frac{1}{Q} + j\sqrt{4 - Q^{-2}} \right)$ et $r_2 = -\frac{\omega_o}{2} \left(\frac{1}{Q} - j\sqrt{4 - Q^{-2}} \right)$

Ces racines étant complexes : $f_1(t) = \exp(r_1 t)$ et $f_2(t) = \exp(r_2 t)$ sont des fonctions complexes.

Or, nous recherchons des solutions réelles à ces équations, on construit deux nouvelles fonctions par combinaison linéaire de f_1 et f_2 mais qui prennent des valeurs réelles.

$$f_1(t) + f_2(t) = 2 \exp\left(-\frac{\omega_o}{2Q} t\right) \cos\left(\omega_o \sqrt{1 - (2Q)^{-2}} t\right) - j f_1(t) + j f_2(t) = 2 \exp\left(-\frac{\omega_o}{2Q} t\right) \sin\left(\omega_o \sqrt{1 - (2Q)^{-2}} t\right)$$

$$\text{Si } Q > 1/2 : S_H(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) (A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)) \text{ avec : } \tau = \frac{2Q}{\omega_o} \text{ et } \omega = \omega_o \sqrt{1 - (2Q)^{-2}}$$

b. Détermination de la solution au problème étudié, exploitation des conditions initiales.

On s'appuie ici sur l'exemple du circuit RLC vu dans la partie 2.1.

On suppose qu'un régime permanent s'est établi avant la bascule de la f.e.m de E_o à 0.

- On obtient alors par étude du circuit équivalent en régime permanent que : $U_c(t=0^-) = E_o$ et

$$I(t=0^-) = C \frac{dU_c}{dt}(t=0^-) = 0$$

- La tension aux bornes du condensateur est continue, on en déduit que : $U_c(t=0^+) = U_c(t=0^-) = E_o$

- L'intensité traversant la bobine est continue, on en déduit que : $\frac{dU_c}{dt}(t=0^+) = \frac{dU_c}{dt}(t=0^-) = 0$

- $Q < 1/2$: on obtient les deux équations : $A_1 + A_2 = E_o$; $r_1 A_1 + r_2 A_2 = 0$

On obtient alors : $A_1 = \frac{r_2}{r_2 - r_1} E_o = \frac{E_o}{2} \left(1 - (1 - 4Q^2)^{-1/2} \right)$; $A_2 = \frac{r_1}{r_1 - r_2} E_o = \frac{E_o}{2} \left(1 + (1 - 4Q^2)^{-1/2} \right)$

$$U_c(t) = E_o \left(\frac{r_2}{r_2 - r_1} \exp(r_1 t) + \frac{r_1}{r_1 - r_2} A_2 \exp(r_2 t) \right)$$

- $Q = 1/2$: on obtient les deux équations : $A_1 = E_o$; $-\omega_o A_1 + A_2 = 0$

On obtient alors : $A_1 = E_o$; $A_2 = \omega_o E_o$ et $U_c(t) = E_o (1 + \omega_o t) \exp(-\omega_o t)$

- $Q > 1/2$: On obtient les deux équations : $A_1 = E_o$; $-\frac{1}{\tau} A_1 + \omega A_2 = 0$

On obtient alors : $A_1 = E_o$; $A_2 = \frac{E_o}{\omega \tau} = E_o (4Q^2 - 1)^{-1/2}$ et $U_c(t) = E_o \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \left(\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega \tau} \sin(\omega t) \right)$

2.4. Nature de la réponse en fonction du facteur de qualité.

L'allure des courbes expérimentales peut alors être commentée à partir des expressions théoriques des solutions établies.

- $R = 14 \text{ k}\Omega$ pour la courbe en trait noir épais. On évalue **le facteur de qualité $Q=0,2$** . L'allure de la courbe de tension aux bornes du condensateur correspond au premier type de solution, combinaison linéaire de deux exponentielles réelles. On peut donc associer à ce type de solution, la réponse strictement décroissante « lente ». On observe le **régime amorti**.
- $R = 5,6 \text{ k}\Omega$ pour la courbe en trait gris épais. On évalue **le facteur de qualité $Q=0,5$** . L'allure de la courbe de tension aux bornes du condensateur correspond au second type de solution, produit d'une exponentielle réelle décroissante et d'une fonction affine. On peut donc associer à ce type de solution, la réponse strictement décroissante « rapide ». On observe le **régime critique**.
- $R = 940 \Omega$ pour la courbe en croix noires. On évalue **le facteur de qualité $Q=3$** . L'allure de la courbe de tension aux bornes du condensateur correspond au troisième type de solution, produit d'une exponentielle réelle décroissante et d'une fonction sinusoïdale. On peut donc associer à ce type de solution, la réponse des oscillations amorties avant de se stabiliser « lentement » autour de la valeur nulle. On observe le **régime pseudo-périodique**.

2.5. Durée du régime transitoire dans les différents régimes.

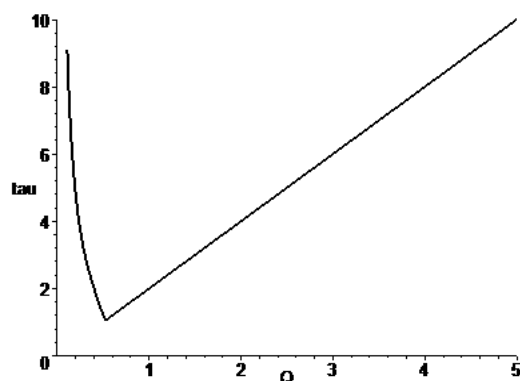
- $Q < 1/2$, les fonctions génératrices de la solution présentent des temps caractéristiques

$$\tau_1 = -\frac{1}{r_1} = \frac{2Q}{\omega_o} \frac{1}{1 + (1 - 4Q^2)^{1/2}} \text{ et } \tau_2 = -\frac{1}{r_2} = \frac{2Q}{\omega_o} \frac{1}{1 - (1 - 4Q^2)^{1/2}}$$

Le plus grand de ces deux temps est de manière évidente τ_2 , c'est lui qui donnera finalement la durée caractéristique du régime transitoire apériodique.

- $Q = 1/2$, le temps caractéristique du régime critique est donné par $\tau = \frac{1}{\omega_o}$

- $Q > 1/2$, le temps caractéristique du régime pseudopériodique est donné par : $\tau = \frac{2Q}{\omega_o}$



La courbe représentative de la durée caractéristique du régime transitoire présente alors l'allure suivante.

On retiendra que :

- le régime critique correspond à la durée de régime transitoire la plus courte $\tau_{\min} = \frac{1}{\omega_o}$
- Pour le régime pseudopériodique la durée s'exprime $\tau = \frac{2Q}{\omega_o}$.
- Pour le régime apériodique, la durée adopte le comportement asymptotique $\tau_2 \xrightarrow{Q \rightarrow 0} \frac{1}{Q\omega_o}$

2.6. Détermination de la réponse à un échelon de tension.

a. Problème étudié.

On suppose que le circuit est arrivé à un régime établi (ou permanent) correspondant à une tension d'entrée nulle, puis qu'à l'instant $t=0$, on allume le générateur qui établit une tension d'entrée continue de valeur $E(t)=E_o$ sur le domaine $t>0$. Sur le domaine $t<0$, on obtient les valeurs de tensions et de courant suivantes :

$$U_R(t=0^-) = 0 ; I(t=0^-) = 0 ; U_L(t=0^-) = 0 ; U_C(t=0^-) = 0$$

La mise en équation du problème amène à résoudre l'équation $\frac{d^2 U_C}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dU_C}{dt}(t) + \omega_0^2 U_C(t) = \omega_0^2 E_0$

vérifiant les conditions initiales : $U_C(t=0^-) = U_C(t=0^+) = 0 ; I(t=0^-) = I(t=0^+) = 0$

b. Recherche des solutions.

La recherche de solutions pour une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants se fait selon la méthode déjà décrite pour celles d'ordre un :

- SPEC : On trouve ici facilement : $S_p(t) = E_0$
- SGEH : Voir la recherche de solution au régime libre.

1^{er} cas : $Q < 1/2$ $S_H(t) = A_1 \exp(r_1 t) + A_2 \exp(r_2 t)$

On obtient donc comme solutions pour l'équation étudiée :

$$S_G(t) = S_p(t) + S_H(t) = E_0 + A_1 \exp(r_1 t) + A_2 \exp(r_2 t)$$

- Les conditions à vérifier sont : $U_C(0) = 0 = E_0 + A_1 + A_2$ et $I(0) = 0 = C \frac{dU_C}{dt}(0) = C(r_1 A_1 + r_2 A_2)$

On obtient alors : $A_1 = \frac{r_2}{r_1 - r_2} E_0 = -\frac{E_0}{2} \left(1 - (1 - 4Q^2)^{-1/2}\right) ; A_2 = \frac{r_1}{r_2 - r_1} E_0 = -\frac{E_0}{2} \left(1 + (1 - 4Q^2)^{-1/2}\right)$.

$$U_C(t) = E_0 \left[1 + \frac{r_2}{r_1 - r_2} \exp(r_1 t) + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \exp(r_2 t) \right] \text{ avec } r_1 = -\frac{\omega_0}{2} \left(\frac{1}{Q} + \sqrt{Q^{-2} - 4} \right) ; r_2 = -\frac{\omega_0}{2} \left(\frac{1}{Q} - \sqrt{Q^{-2} - 4} \right)$$

2^{ième} cas : $Q = 1/2$ $S_H(t) = (A_1 + A_2 t) \exp(-\omega_0 t)$

On obtient donc comme solutions pour l'équation étudiée :

$$S_G(t) = S_p(t) + S_H(t) = E_0 + (A_1 + A_2 t) \exp(-\omega_0 t)$$

- Les conditions à vérifier sont : $U_C(0) = 0 = E_0 + A_1$ et $I(0) = 0 = C \frac{dU_C}{dt}(0) = C(A_2 - \omega_0 A_1)$

On obtient alors : $A_1 = -E_0 ; A_2 = -\omega_0 E_0$.

$$U_C(t) = E_0 \left[1 - (1 + \omega_0 t) \exp(-\omega_0 t) \right] \text{ avec } r = -\omega_0$$

3^{ième} cas : $Q > 1/2$ $S_H(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) (A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t))$

On obtient donc comme solutions pour l'équation étudiée :

$$S_G(t) = S_p(t) + S_H(t) = E_0 + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) (A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t))$$

- Les conditions à vérifier sont : $U_C(0) = 0 = E_0 + A_1$ et $I(0) = 0 = C \frac{dU_C}{dt}(0) = C\left(\omega A_2 - \frac{1}{\tau} A_1\right)$

On obtient alors : $A_1 = -E_0 ; A_2 = -\frac{1}{\omega \tau} E_0$.

$$U_C(t) = E_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \left(\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega \tau} \sin(\omega t) \right) \right] \text{ avec } : \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \text{ et } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - (2Q)^{-2}}$$

2.7. Etude énergétique.

Reprenons la loi des mailles pour ce circuit : $E(t) = U_R(t) + U_L(t) + U_C(t)$

Pour exprimer le bilan de puissance, on peut multiplier toute l'équation par le courant $i(t)$:

$$i(t).E(t) = i(t).U_R(t) + i(t).U_L(t) + i(t).U_C(t)$$

On obtient alors une équation d'évolution pour l'énergie stockée dans le circuit dans le condensateur (E_C) et dans

la bobine (E_L) : $\frac{d}{dt}(E_C + E_L) = P_{\text{généré}} - P_J$

Le bilan énergétique sur la transformation des grandeurs caractéristiques du système donne alors :

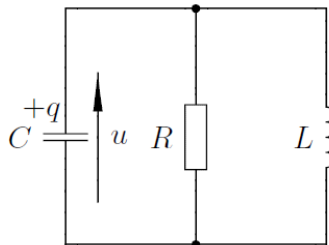
- $E_{C,f} - E_{C,i} = \frac{1}{2} C E_0^2$ $E_{L,f} - E_{L,i} = 0$

- $E_{\text{généré}} = \int_{t=0}^{t=+\infty} P_{\text{généré}} dt$ avec $P_{\text{généré}} = E_0 \cdot C \frac{dU_c}{dt}$ ce qui amène $E_{\text{généré}} = \int_0^{+\infty} CE_0 \frac{dU_c}{dt} dt = CE_0^2$
- L'énergie totale dissipée par effet joule est alors : $E_J = E_{\text{généré}} - (E_{C,f} - E_{C,i}) = \frac{1}{2} CE_0^2$

Capacités exigibles

- Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.
- Interpréter l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.
- Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
- Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.
- Déterminer analytiquement la réponse dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique et en déterminant des conditions initiales.
- Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.

AD1 : Circuit RLC parallèle



Un condensateur est chargé et présente alors une tension constante U_0 sur l'intervalle de temps $t < 0$. A l'instant initial, on le connecte à un circuit constitué d'un conducteur ohmique et d'une bobine en parallèle dans lequel ne circule aucun courant sur l'intervalle de temps $t < 0$.

1. Déterminer les conditions initiales de ce problème en exprimant $u(t=0^+)$ et $i_c(t=0^+)$.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ sur l'intervalle $t > 0$. La mettre sous forme canonique et exprimer les paramètres introduits en fonction de C, R et L.
3. Exprimer R_C la résistance pour laquelle on observe un régime critique.

On suppose que la résistance est égale à R_C .

4. Déterminer l'expression de $u(t)$ sur l'intervalle de temps $t > 0$.