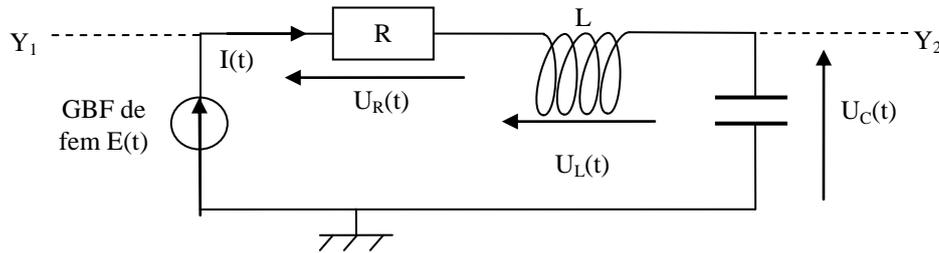


Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé.

1. Introduction du régime sinusoïdal forcé.

1.1. Exemple du circuit RLC.



On étudie à nouveau le circuit RLC, on souhaite établir la réponse de ce circuit lorsqu'on le soumet à un générateur produisant une f.e.m sinusoïdale $E(t) = e_o \cos(\omega t)$. On choisit ici l'origine des temps pour que la phase à l'origine de ce signal soit nulle.

On établit alors l'équation différentielle vérifiée par la tension $U_C(t)$.

On écrit la loi des mailles pour ce circuit : $E(t) = U_R(t) + U_L(t) + U_C(t)$

On écrit alors les lois de comportement pour le conducteur ohmique et la bobine et le condensateur :

$$U_R(t) = RI(t) ; U_L(t) = L \frac{dI}{dt}(t) ; I(t) = C \frac{dU_C}{dt}(t)$$

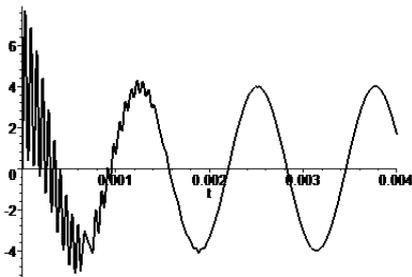
On obtient l'équation : $\frac{d^2 U_C}{dt^2}(t) + \frac{\omega_o}{Q} \frac{dU_C}{dt}(t) + \omega_o^2 U_C(t) = \omega_o^2 e_o \cos(\omega t) ; \omega_o = (LC)^{-1/2} ; Q = \frac{1}{R} \left(\frac{L}{C} \right)^{1/2}$.

1.2. Régime transitoire et régime sinusoïdal permanent.

La réponse en tension du circuit est une solution de l'équation précédemment établie. D'après la théorie connue pour les équations linéaires à coefficients constants, elle se décompose en deux parties :

- Une solution de l'équation homogène associée, c'est-à-dire la réponse du circuit en régime libre que l'on a déjà étudié en première période. Quel que soit le type de réponse (amortie, critique ou pseudo périodique), le régime libre présente une durée caractéristique τ . Au bout d'une durée de l'ordre de quelques fois τ , l'amplitude du régime libre est quasiment nulle.

- Une solution particulière de l'équation complète qui est la réponse au signal sinusoïdal placé en entrée du circuit. On désigne cette solution particulière par le terme de régime sinusoïdal forcé. Lorsque le régime libre prend fin, on n'observe plus que le régime sinusoïdal forcé que nous allons étudier par la suite dans ce chapitre. Le régime sinusoïdal forcé est sinusoïdal de même pulsation que la f.e.m du générateur en entrée du système.



Par une résolution numérique, on étudie la réponse en tension du circuit RLC pour un générateur de f.e.m sinusoïdale. On observe l'établissement du régime sinusoïdal forcé au bout d'une durée de l'ordre de quelques τ , le temps d'amortissement du régime libre.

2. Le régime sinusoïdal forcé.

2.1. Principe et application au cas du circuit RLC.

Trouver l'expression du signal étudié en régime sinusoïdal forcé revient donc à trouver l'expression de la solution particulière de l'équation différentielle linéaire (du second ordre) étudiée.

- D'après votre cours de mathématiques, on cherche la solution particulière de l'équation complète sous la forme d'une fonction sinusoïdale synchrone avec le second membre.

Ici, la tension s'exprime donc comme une fonction sinusoïdale synchrone de la f.e.m en entrée du circuit $U_C(t) = u_o \cos(\omega t + \varphi)$, où on doit déterminer l'amplitude u_o et le déphasage par rapport à la f.e.m φ .

- Pour déterminer cette réponse, on utilise en sciences physiques le passage par les notations complexes :

✓ **On associe au second membre la notation complexe correspondante.**

Ce qui s'applique ici en introduisant la f.e.m complexe $\underline{E}(t) = e_o \exp(j\omega t)$ telle que $E(t) = \text{Re}(\underline{E}(t))$

✓ **On associe à la solution recherchée le signal complexe correspondant**

Ce qui s'applique ici en introduisant la tension complexe $\underline{U}_C(t) = \underline{u}_o \exp(j\omega t) = |u_o| \exp(j\varphi) \exp(j\omega t)$ telle que $U_C(t) = \text{Re}(\underline{U}_C(t))$

✓ **On établit l'équation algébrique vérifiée par ces signaux complexes en traduisant les dérivées temporelles par des multiplications par $j\omega$.**

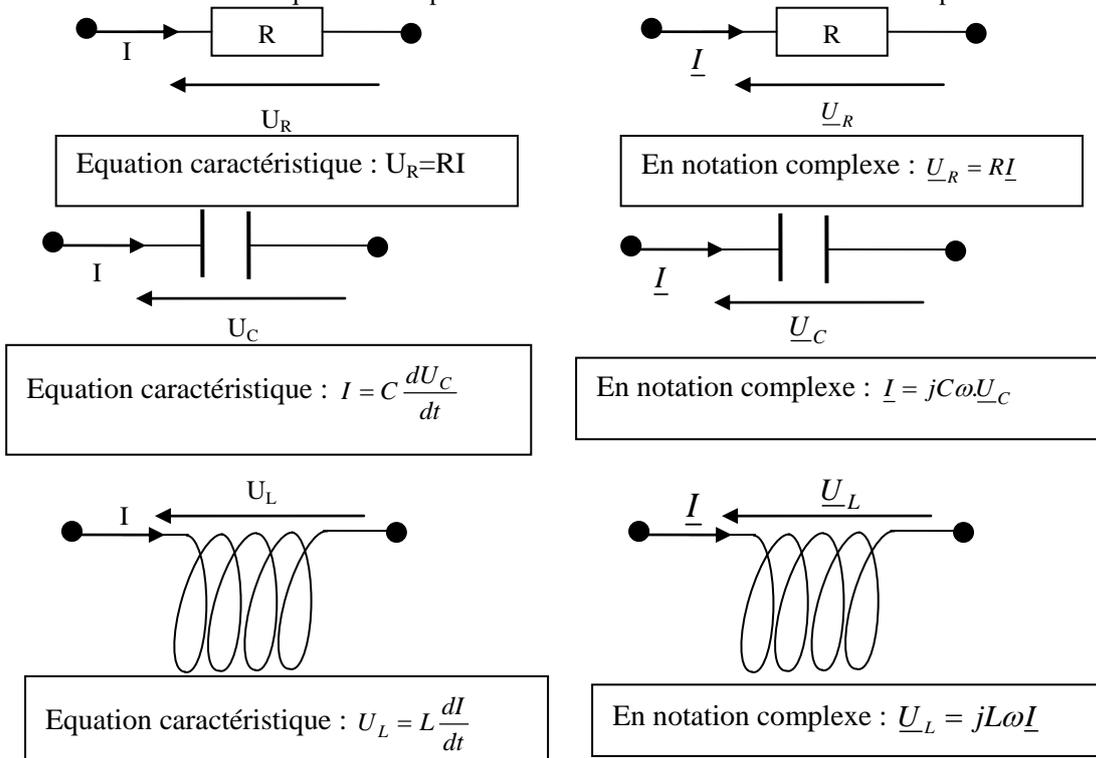
L'équation différentielle $\frac{d^2 U_C(t)}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q} \frac{dU_C(t)}{dt} + \omega_o^2 U_C(t) = \omega_o^2 e_o \cos(\omega t)$

Se traduisant ici en l'équation algébrique $(-\omega^2) \underline{u}_o + j \frac{\omega \omega_o}{Q} \underline{u}_o + \omega_o^2 \underline{u}_o = \omega_o^2 e_o$

2.2. Impédance et admittance complexes.

Si on souhaite étudier un circuit en régime sinusoïdal forcé, on vient de voir que l'utilisation des notations complexes s'impose.

Il apparaît donc comme logique de traiter directement le circuit en notation complexe. On commence donc par reprendre les relations caractéristiques des composants linéaires et les traduire en notation complexe.



En régime sinusoïdal forcé, on associe donc aux grandeurs physiques réelles, ici la tension aux bornes d'un dipôle et l'intensité le traversant, des grandeurs complexes telles que : $I(t) = \text{Re}(\underline{I}(t))$; $U_k(t) = \text{Re}(\underline{U}_k(t))$

On définit alors :

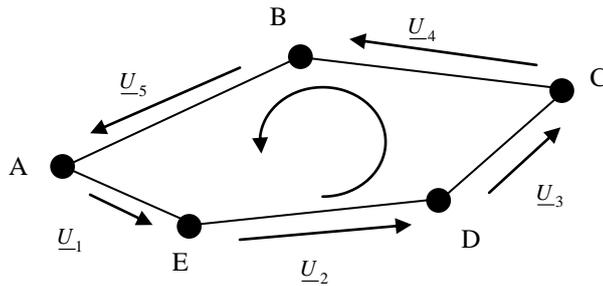
- L'impédance complexe $\underline{Z}(\omega)$ d'un dipôle par la relation : $\underline{Z}(\omega) = \frac{\underline{U}_k(t)}{\underline{I}(t)}$
- L'admittance complexe d'un dipôle par la relation : $\underline{Y}(\omega) = \frac{\underline{I}(t)}{\underline{U}_k(t)} = \frac{1}{\underline{Z}(\omega)}$

D'après ce qu'on vient d'établir plus haut on obtient :

• Pour un résistor :	Impédance $\underline{Z}(\omega) = R$	Admittance $\underline{Y}(\omega) = \frac{1}{R}$
• Pour un condensateur :	Impédance $\underline{Z}(\omega) = \frac{1}{jC\omega}$	Admittance $\underline{Y}(\omega) = jC\omega$
• Pour une bobine :	Impédance $\underline{Z}(\omega) = jL\omega$	Admittance $\underline{Y}(\omega) = \frac{1}{jL\omega}$

2.3. Lois de l'électrocinétique.

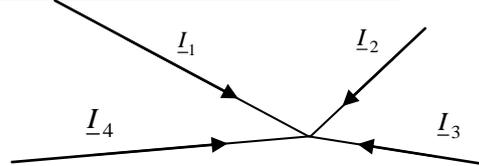
a. Lois des mailles.



Lois des mailles :

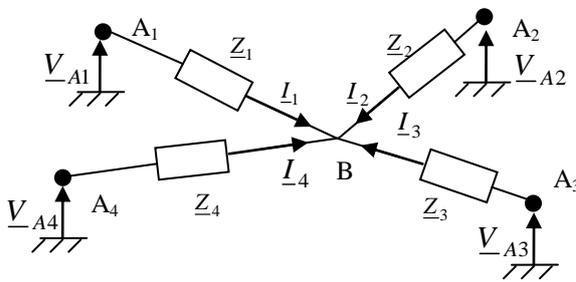
$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 + \underline{U}_4 + \underline{U}_5 = 0$$

b. Lois des nœuds, loi des nœuds en terme de potentiel.



Lois des nœuds :

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$



Lois des nœuds en terme de potentiel :

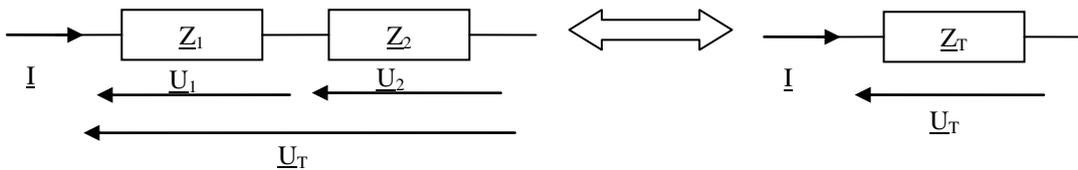
$$\frac{V_B - V_{A1}}{Z_1} + \frac{V_B - V_{A2}}{Z_2} + \frac{V_B - V_{A3}}{Z_3} + \frac{V_B - V_{A4}}{Z_4} = 0$$

Lorsqu'on établit les équations régissant un système électronique **en régime sinusoïdal forcé**, on peut utiliser la loi des nœuds en terme de potentiel pour les différents nœuds du circuit à la place des lois des nœuds en terme d'intensité. Ceci permet de réduire le nombre d'inconnues avec lesquelles on travaille.

2.4. Lois d'association.

a. Association en série :

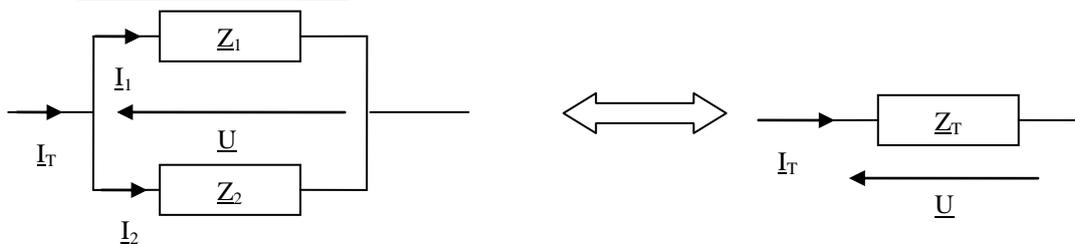
Pour des dipôles en série, on fait la somme des impédances : $Z_T = Z_1 + Z_2$



Pour des dipôles en série, l'impédance totale est obtenue par la somme des impédances : $Z_T = Z_1 + Z_2$

On peut écrire une relation du diviseur de tension : $\underline{U}_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \underline{U}_T$

b. Association en parallèle :



Pour des dipôles en parallèle, l'admittance totale est obtenue par la somme des admittances : $\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$

3. Etude de la réponse en tension du circuit RLC.

3.1. Détermination de l'amplitude et de la phase par les complexes.

On a établi que si on soumet le circuit RLC à un générateur de f.e.m sinusoïdale $E(t) = e_o \cos(\omega t)$, la tension aux bornes du condensateur vérifie l'équation :

$$\frac{d^2 U_c(t)}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q} \frac{dU_c(t)}{dt} + \omega_o^2 U_c(t) = \omega_o^2 e_o \cos(\omega t)$$

La solution se cherche alors sous forme $U_c(t) = u_o \cos(\omega t + \varphi)$ à laquelle on associe le signal complexe $\underline{U}_c(t) = \underline{u}_o \exp(j\omega t)$. L'équation se traduit alors pour l'amplitude du signal complexe par :

$$(-\omega^2) \underline{u}_o + j \frac{\omega \omega_o}{Q} \underline{u}_o + \omega_o^2 \underline{u}_o = \omega_o^2 e_o$$

On en déduit alors l'amplitude complexe de la réponse en tension : $\underline{u}_o = \frac{\omega_o^2 e_o}{(\omega_o^2 - \omega^2) + j \frac{\omega \omega_o}{Q}}$

Il faut alors faire le retour aux caractéristiques de la tension réelle aux bornes du condensateur $U_c(t) = u_o \cos(\omega t + \varphi)$ c'est-à-dire traduire le lien entre l'amplitude du signal complexe et :

➤ L'amplitude du signal réel : $u_o = |\underline{u}_o|$ ce qui donne ici $u_o = |\underline{u}_o| = \frac{e_o}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$ où $x = \frac{\omega}{\omega_o}$

➤ la phase à l'origine du signal réel : $\varphi = \arg(\underline{u}_o)$ avec ici $\varphi = \arg(\text{numérateur}) - \arg(\text{dénominateur})$

Le numérateur est réel positif donc son argument est nul

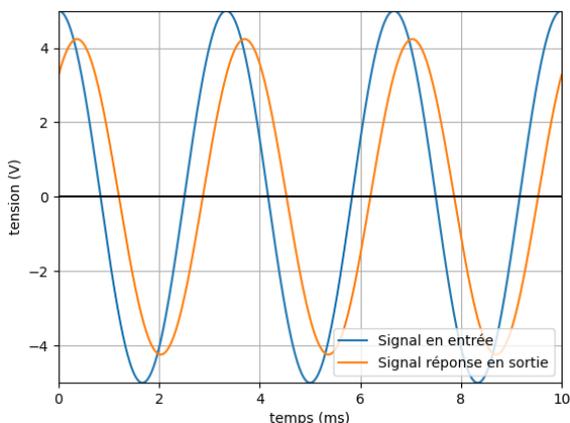
Pour le dénominateur, on sait que $\tan(\arg_{\text{denom}}) = \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \frac{x}{Q(1-x^2)}$ toujours avec $x = \frac{\omega}{\omega_o}$.

Selon le signe de x, il faut alors distinguer deux cas, on s'arrange en physique pour la courbe représentative de la phase

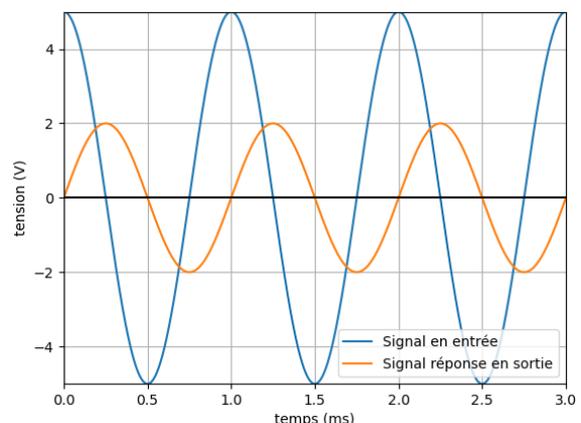
$$\text{soit continue en } x=1 \text{ ce qui donne : } \varphi = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right) & \text{si } x < 1 \\ -\arctan\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right) - \pi & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3.2. Allure des courbes du signal de forçage et de la réponse en tension.

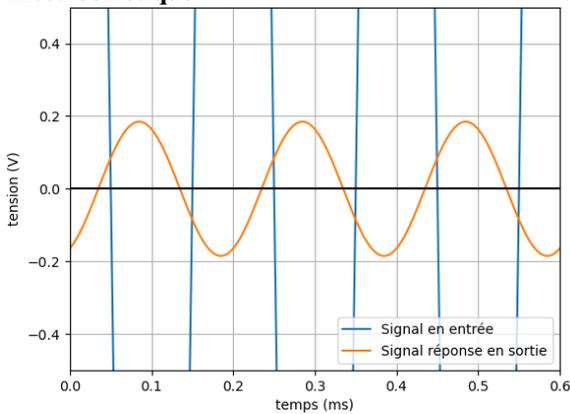
Lorsqu'on observe les signaux à l'aide d'un oscilloscope, $e(t) = e_o \cos(\omega t)$ en entrée du circuit RLC avec $e_o = 5,0V$, $U_c(t) = u_o \cos(\omega t + \varphi)$ en sortie aux bornes du condensateur, on obtient alors l'allure suivante pour un circuit RLC de fréquence propre $f_o = 1kHz$ et de facteur de qualité $Q = 0,4$.



pour une fréquence du signal en entrée 0,3kHz.



pour une fréquence du signal en entrée 1,0kHz

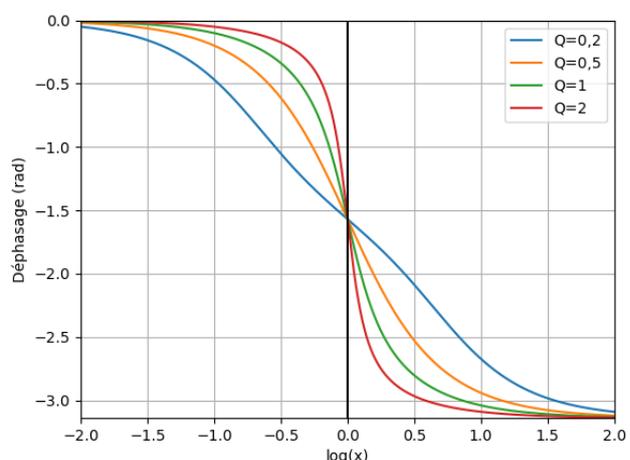
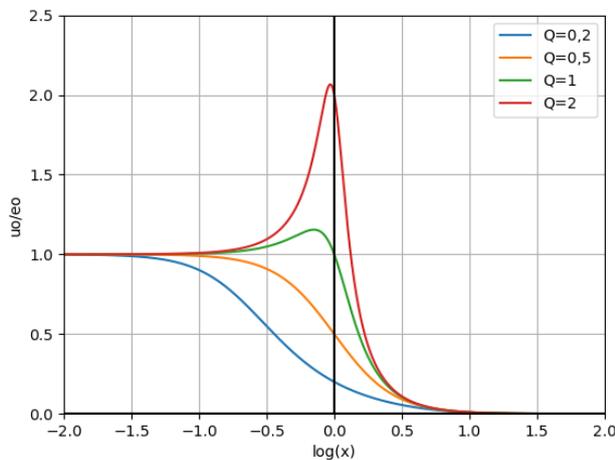


pour une fréquence du signal en entrée 5,0kHz

- Déterminer sur ces trois graphiques l'amplitude et le déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée.
- Vérifier la cohérence avec les valeurs fournies pour f_0 et Q .

3.3. Allure des courbes de l'amplitude et de la phase pour la réponse en tension du circuit RLC.

La représentation des courbes donnant l'amplitude du signal en sortie, et le déphasage introduit par le circuit entre le signal d'entrée et la tension en sortie, aux bornes du condensateur, se fait en échelle logarithmique en abscisse pour visualiser de manière symétrique le domaine basse fréquence sous la valeur de fréquence propre f_0 et le domaine haute fréquence au-dessus de la fréquence propre. On les représente ci-dessous en fonction de $\log_{10}(x)$.



Comportement asymptotique basse fréquence :

- Le gain est unitaire et le déphasage nul. Le circuit « suit » la commande du générateur.

Comportement asymptotique haute fréquence :

- Le gain est nul et le déphasage de $-\pi$. Le circuit ne « suit » plus la commande du générateur.

Comportement autour de la fréquence propre :

- Si le circuit présente un facteur de qualité suffisant, il y a un intervalle de valeur de x pour lequel le circuit « sur réagit » à la commande du générateur.
- Pour la fréquence propre du système, le déphasage est de $-\pi/2$, le générateur et la tension aux bornes du condensateur sont en quadrature.

3.4. Phénomène de résonance en tension du circuit RLC.

On constate donc que le circuit peut présenter une réponse plus grande en tension que la f.e.m du générateur. Ce phénomène est appelée résonance. On doit établir la valeur minimale de Q pour observer la résonance et lorsque celle-ci a lieu la valeur de pulsation ω_R (ou encore le rapport x_R) pour laquelle on a une réponse d'amplitude maximale.

L'amplitude $u_0 = \frac{e_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$ est maximale quand $f(x) = (1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$ est minimal.

Etudions alors la dérivée de $f(x)$: $\frac{df}{dx}(x) = 4x \left(-1 + x^2 + \frac{1}{2Q^2} \right)$

On cherche alors la possibilité d'une solution non nulle à l'équation : $\frac{df}{dx}(x) = 0$.

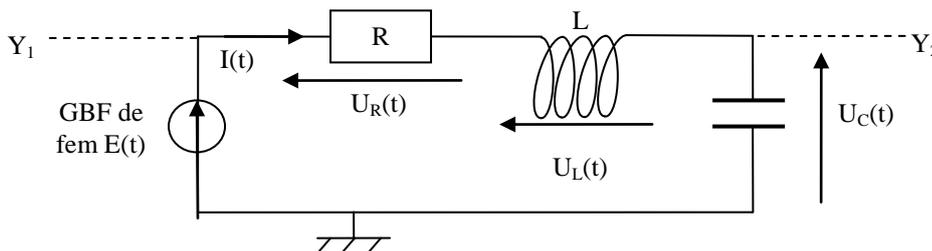
On cherche donc les annulations de $\left(-1 + x^2 + \frac{1}{2Q^2}\right)$ soit les solutions de $x^2 = \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$

- Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, il n'y a pas de solution réelle et le circuit ne présentera pas de résonance.
- Si $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, il y a une solution réelle positive, le circuit est en résonance et le maximum de la réponse en amplitude est obtenue pour $x_R = \frac{\omega_R}{\omega_0} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)}$.

4. Etude de la réponse en intensité du circuit RLC.

4.1. Détermination directe des caractéristiques de l'intensité parcourant le circuit RLC.

Puisqu'on cherche à établir le comportement du circuit en régime sinusoïdal forcé, on va commencer à prendre l'habitude d'employer directement les notations complexes pour aboutir aux grandeurs qui nous intéressent.



Pour le circuit RLC étudié ici, on observe que les trois composants sont associés en série et qu'on peut donc déterminer une impédance équivalente par la relation : $\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C$

L'amplitude complexe \underline{i}_o de l'intensité $\underline{I}(t) = \underline{i}_o \exp(j\omega t)$ dans le circuit en régime sinusoïdal forcé est alors obtenue

par la relation : $\underline{e}_o = \underline{Z}_{eq} \underline{i}_o$ ce qui donne $\underline{e}_o = \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{i}_o$

On aboutit alors à la forme suivante : $\underline{i}_o = \frac{e_o}{R} \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$ où $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$; $Q = \frac{1}{R} \left(\frac{L}{C} \right)^{1/2}$; $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

➤ L'amplitude réelle de l'intensité est alors: $i_o = \frac{e_o}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$

➤ Le déphasage en intensité s'exprime : $\Phi = \arg(\underline{i}_o)$ soit $\Phi = -\arctan \left(Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \right)$

4.2. Allure des courbes en amplitude et en phase pour l'intensité parcourant le circuit RLC.

Comportement asymptotique basse fréquence :

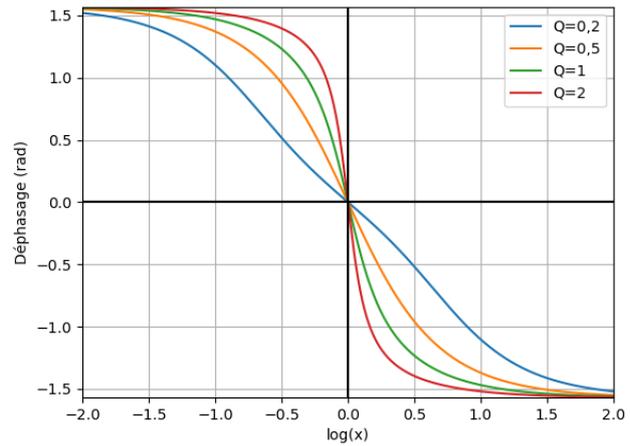
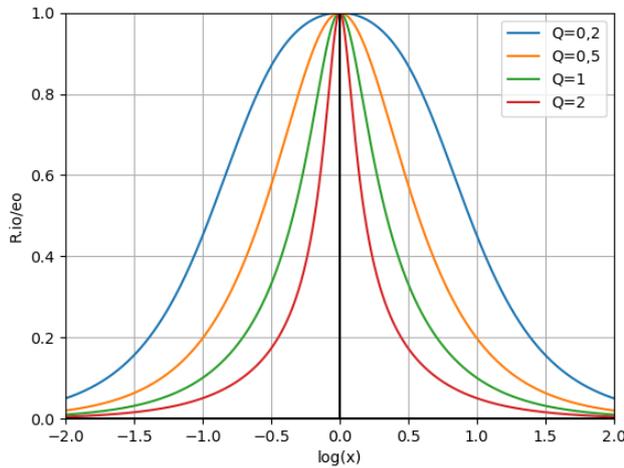
➤ Le gain est nul le déphasage de $+\pi/2$. Lorsque la tension aux bornes du condensateur reproduit la f.e.m, il est logique que l'intensité soit nulle. L'intensité est en avance de phase sur la f.e.m et donc la tension aux bornes du condensateur, ce qui est cohérent avec la multiplication par $j\omega$ de l'opération de dérivation.

Comportement asymptotique haute fréquence :

➤ Le gain est nul et le déphasage de $-\pi/2$. Le circuit ne « suit » plus la commande du générateur, il est logique que l'intensité du courant soit elle aussi nulle.

Comportement autour de la fréquence propre :

➤ L'intensité passe par un maximum en $x=1$, la résonance en intensité se fait lorsqu'on place en entrée du circuit un signal de pulsation égale à la pulsation propre.
➤ Le déphasage est nul, le générateur et l'intensité dans le circuit sont alors en phase.



4.3. Phénomène de résonance en intensité du circuit RLC.

La résonance en intensité a lieu quel que soit la valeur du facteur de qualité, on constate cependant qu'elle est d'autant plus étroite que le facteur de qualité augmente. On va quantifier cette caractéristique en déterminant la largeur du domaine de pulsation sur lequel le gain en intensité est supérieur au quotient du gain max divisé par racine carré de deux.

On cherche les valeurs de x telle que : $G(x) = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ On obtient donc $-1 < Q\left(x-\frac{1}{x}\right) < 1$

On étudie donc les deux conditions : $P_1(x) = x^2 - \frac{1}{Q}x - 1 < 0$ et $P_2(x) = x^2 + \frac{1}{Q}x - 1 > 0$

Pour le premier polynôme, il faut donc que : $x_1 < x < x_2$ avec : $x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q} - \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}\right)$; $x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}\right)$

Pour le second polynôme : $x > x_2'$ ou $x < x_1'$ avec : $x_1' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{Q} - \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}\right)$; $x_2' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}\right)$

Puisque x est nécessairement positif en tant que rapport de pulsations, la plage correspondante est $x_2' < x < x_2$, on obtient alors la largeur de la plage de résonance du circuit RLC en intensité : $\Delta x = \frac{1}{Q}$

Capacités exigibles

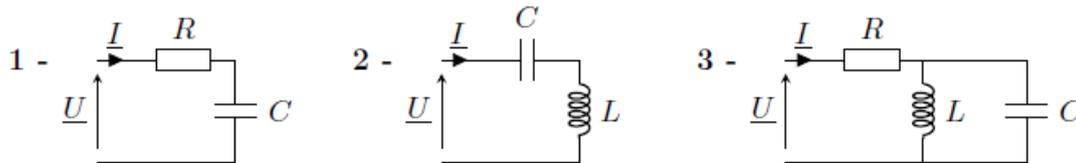
- Décrire un signal harmonique en termes d'amplitude, période, fréquence, pulsation, phase.
- Déterminer le déphasage entre deux signaux harmoniques synchrones.
- Passer de la représentation réelle à la représentation complexe d'un signal harmonique, et réciproquement.
- Connaître et établir l'expression de l'impédance complexe d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine.
- Remplacer une association série ou parallèle d'impédances (resp. d'admittances) par une impédance (resp. une admittance) équivalente.
- Étudier un circuit électrique en régime permanent sinusoïdal forcé par la méthode des complexes.
- Définir une résonance.
- A partir d'une impédance complexe donnée, déterminer analytiquement la pulsation de résonance d'un système.
- Savoir et savoir établir que la résonance en tension aux bornes du condensateur dans le circuit RLC série n'existe que pour les facteurs de qualité suffisamment grands ($Q > 1/\sqrt{2}$)
- Relier qualitativement et quantitativement l'acuité de la résonance en intensité dans le circuit RLC série au facteur de qualité.

AD1 : Impédance et admittance des composants linéaires passifs.

- Rappeler la loi de comportement d'un condensateur. En déduire l'expression de l'impédance associée à un condensateur. Etudier le comportement limite de cette impédance pour les hautes fréquences et les basses fréquences. En déduire le dipôle équivalent à un condensateur en régime limite basse fréquence et régime limite haute fréquence.
- Faire ensuite de même avec la bobine.

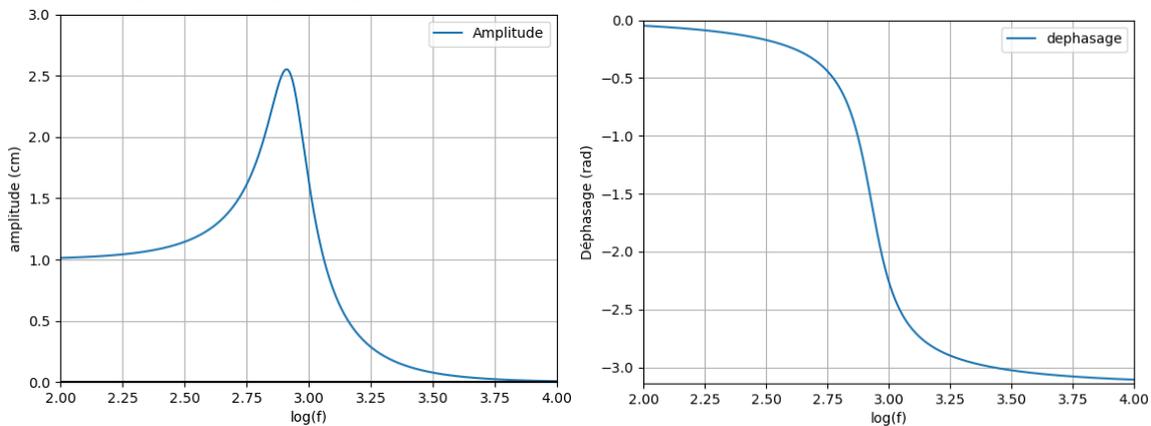
AD2 : Impédance équivalente à des associations de composants.

- Exprimer l'impédance équivalente entre les bornes d'entrée pour les trois circuits suivants c'est-à-dire Z_{eq} tel que $\underline{U} = Z_{eq} \underline{I}$



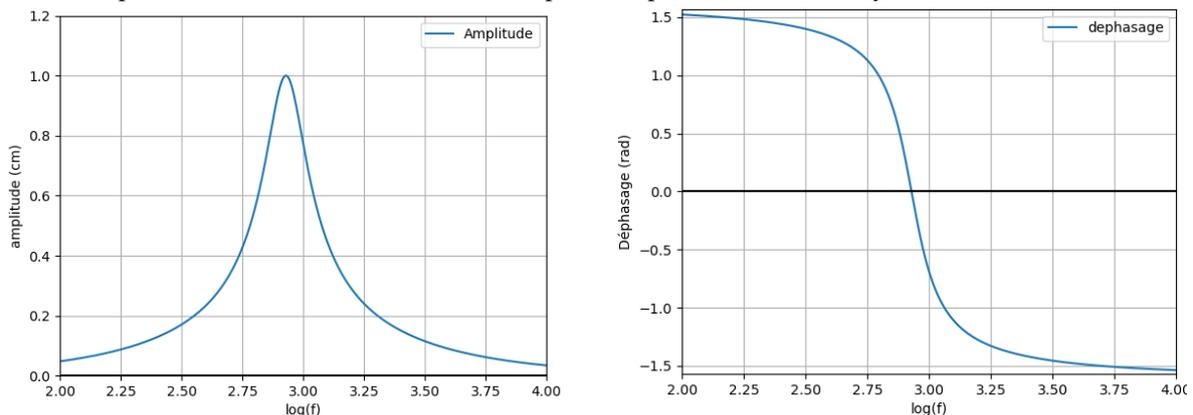
AD3 : Analyse des courbes de résonance d'un oscillateur amorti mécanique.

L'étude expérimentale d'un oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé permet de relever les courbes suivantes pour la réponse en amplitude pour le mouvement du système.



- A quel type de réponse du circuit RLC vous font penser ces courbes ?
- Déterminer la fréquence propre et le facteur de qualité de cet oscillateur.

La même étude permet de relever les courbes suivantes pour la réponse en vitesse du système.



- A quel type de réponse du circuit RLC vous font penser ces courbes ?
- Vérifier que ces courbes sont cohérentes avec les valeurs précédentes de la fréquence propre et du facteur de qualité.