Problème 1 : Modélisation d'une locomotive électrique.

1. Pour une longueur L=1m, la résistance donne $\boxed{r = \frac{1}{\sigma_C S_C} = 1{,}17.10^{-4}\,\Omega.m^{-1}}$ et $\boxed{r_R = \frac{1}{\sigma_R S_R} = 1{,}5.10^{-5}\,\Omega.m^{-1}}$
2. On constate que $r_R/r \approx 0{,}13$. La résistance électrique des rails est environ 10 fois plus faible que celle du caténaire ce qui explique qu'on la néglige dans notre modèle simplifié.
3. La section AC est de longueur x et la section CB de longueur (L-x) : $\boxed{R_{AC} = r.x}$ et $\boxed{R_{CB} = r.(L-x)}$
4. La loi de mailles dans FACM donne $E - U_{AC} - U(x) = 0$ et la loi d'Ohm $U_{AC} = R_{AC} I_{AC}$ ce qui donne $\boxed{I_{AC} = \frac{E-U(x)}{r.x}}$ de même $\boxed{I_{BC} = \frac{E-U(x)}{r.(L-x)}}$
5. Pour trouver I, on utilise la loi des nœuds en C : $I = I_{AC} + I_{BC}$ finalement : $\boxed{U(x) = E - \frac{rI}{L}.x(L-x)}$
6. On étudie l'évolution de la chute de tension $\Delta U = \frac{rI}{L}.x(L-x)$ en fonction de x en déterminant sa dérivée : $\frac{d(\Delta U)}{dx} = \frac{rI}{L}.(L-2x)$ La dérivée est positive sur [0,L/2[et négative sur]L/2,L]

On en déduit que la chute de tension est maximale en x=L/2

On obtient donc : $\boxed{\Delta U_{\max} = \frac{rLI}{4}}$ L'application numérique donne $\boxed{\Delta U_{\max} = 293V}$

7. La puissance électrique fournie par les alimentations est : $P_F = P_{S1} + P_{S2} = E.I_{AC} + E.I_{BC}$ ce qui donne finalement $\boxed{P_F = E.I}$

La puissance électrique reçue par la motrice est $\boxed{P_m = U(x).I}$

La puissance Joule est la puissance reçue par les sections de caténaire AC et BC soit $P_J = U_{AC}.I_{AC} + U_{BC}.I_{BC} = \left(E - U(x)\right)I_{AC} + \left(E - U(x)\right)I_{BC}$, en factorisant et en utilisant la loi des nœuds, on obtient finalement : $\boxed{P_J = \left(E - U(x)\right).I}$

8. On vérifie bien que $P_F = P_m + P_J$, la puissance fournie par les sources de tension est consommée dans la motrice pour faire avancer le train ou perdue par effet Joule dans le caténaire.
9. La position du train à l'instant t est : $\boxed{x(t) = v_O t}$ et l'instant où le train passe en B est $\boxed{t_B = \frac{L}{v_O}}$
10. L'énergie fournie de A en B par les stations est : $\boxed{E_F = \int_0^{t_B} P_F dt = E.It_B = E.I.\frac{L}{v_O}}$ puisque P_F est constante.

L'énergie reçue par le train de A en B est : $E_m = \int_0^{t_B} P_m dt = \int_0^{t_B} \left(E - \frac{rI}{L} v_O t\left(L - v_O t\right)\right) I dt$

$E_m = EIt_B - rI^2 v_O \frac{t_B^2}{2} + \frac{rI^2}{L} v_O^2 \frac{t_B^3}{3}$ et finalement $\boxed{E_m = \frac{IL}{v_O}\left(E - \frac{rLI}{6}\right)}$

11. Le rendement de l'alimentation est alors : $\boxed{\eta = \left(1 - \frac{rLI}{6E}\right)}$ A.N : $\boxed{\eta = 0{,}87}$ Soit 87% qui est un rendement moyen pour une installation électrique mais bien meilleur que les rendements des moteurs thermiques.
12. En reprenant la formule précédente de manière un peu abusive, on arrive à un rendement pour le TGV de $\boxed{\eta_{TGV} \approx 0{,}97}$ ce qui a permis d'atteindre des vitesses plus grandes sans que les pertes par effet Joule dans la caténaire n'augmentent dangereusement.
13. Dans la deuxième configuration, les sections AD, BD et B'D' sont soumises à la même différence de potentiel puisque $V_A = V_B = V_{B'} = E$ et que $V_D = V_{D'} = U$ en prenant pour référence de potentiel la ligne des rails.

On peut donc les voir comme étant toutes connectées à un même point de potentiel E d'un côté et un point de potentiel U de l'autre, elles sont alors associées en parallèle. Ces trois fils sont de longueur L/2, présentent une résistance par unité de longueur r, ils présentent donc une résistance individuelle de r*(L/2) et lorsqu'ils sont associés en parallèle on obtient : $\frac{1}{R_{BD'}} = \frac{2}{rL} + \frac{2}{rL} + \frac{2}{rL}$ d'où $\boxed{R_{BD'} = r\frac{L}{6}}$.

14. Pour cette section de fil de longueur (L/2-x) la résistance s'exprime : $\boxed{R_{CD'} = r\left(\frac{L}{2} - x\right)}$
15. Les deux résistances $R_{BD'}$ et $R_{CD'}$ sont alors associées en série d'où $R_2 = R_{BD'} + R_{CD'}$

et finalement $\boxed{R_2 = r\left(\frac{2L}{3} - x\right)}$

16. L'intensité I_2 est obtenue par la loi d'Ohm pour la résistance R_2 soumise à la tension E-U(x) ce qui donne $I_2 = \frac{E - U(x)}{R_2}$ et $\boxed{I_2 = 3\frac{E - U(x)}{r(2L - 3x)}}$
17. L'intensité dans la section de A à C est obtenue par la loi d'Ohm pour la résistance $R_1 = rx$ soumise à la tension E-U(x) d'où $\boxed{I_1 = \frac{E - U(x)}{rx}}$
18. On applique la loi des nœuds pour obtenir $I = I_1 + I_2$ ce qui donne $I = E - U(x)\left(\frac{1}{rx} + \frac{3}{r(2L - 3x)}\right)$

    et finalement $\boxed{\Delta U_{//} = \frac{x(2L - 3x)}{2L} rI}$ ce qui correspond bien à la relation fournie.
19. Pour déterminer les variations de la chute de tension, on calcule la dérivée par rapport à x :

$\frac{d(\Delta U_{//})}{dx} = \frac{rI}{2L}.(2L - 6x)$ qui est positive su x<L/3, négative si x>L/3 et s'annule en L/3.

On en déduit que la chute de tension est maximale en L/3 (et en 2L/3)

et qu'elle prend la valeur $\boxed{\Delta U_{//\max} = \frac{rIL}{6}}$ A.N : $\boxed{\Delta U_{//\max} = 232V}$

20. On observe que la chute de tension sera réduite dans la seconde installation et que la perte par effet Joule sera donc réduite dans le système. Le rendement de l'installation sera donc meilleur.

Cependant, l'installation d'un double caténaire est un surcout important, et il est donc nécessaire que l'amélioration du rendement en vaille la peine.

Pour les installations usuelles, il est possible qu'elle en vaille la peine, mais pour le TGV, le peu de rendement supplémentaire obtenu possiblement rend la technologie à double caténaire inutile… D'autant plus quand les caténaires du TGV font l'objet d'attaque pour voler les caténaires en question.

https://www.lexpress.fr/actualite/societe/fait-divers/saint-denis-un-kilometre-de-catenaire-vole-sur-les-voies-ferrees_1313857.html

Problème 2 : Gain de temps et économie d'énergie.

1) Modélisation sommaire

1. La différence de température et la tension sont deux grandeurs jouant le même rôle : $\Delta\theta \Leftrightarrow U$

L'intensité du courant et le flux thermique jouent des rôles équivalents : $\Phi_R \Leftrightarrow I$

La relation demandée traduit donc la loi d'Ohm dans le problème de régulation de température : $\boxed{\Delta\theta = R_{th}\Phi_R}$

2. On reprend les mêmes analogies mais en l'appliquant au cas du condensateur en électrocinétique ce qui donne : $\boxed{\Phi_C = C_{th}\frac{d\theta}{dt}}$
3. La loi de l'électrocinétique donnant le bilan de flux thermique est la loi des nœuds. Ce bilan s'exprime ici : $\Phi = \Phi_C + \Phi_R$.
4. En régime permanent, le condensateur se comporte en coupe circuit. On peut donc éliminer la branche correspondante dans le bilan thermique précédent.

On obtient alors : $\boxed{\Phi_O = \Phi_R = \frac{1}{R_{th}}(\theta_c - \theta_e)}$ A.N : $\boxed{\Phi_O = 6{,}0kW}$

2) Mise en température.

5. Le bilan se traduit maintenant par : $\Phi_O = C_{th}\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{1}{R_{th}}\left(\theta(t) - \theta_e\right)$

ce qui donne en introduisant τ_O : $\boxed{\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{1}{\tau_O}\theta(t) = \dfrac{1}{\tau_O}\theta_c}$

6. Les solutions de cette équation sont de la forme : $s(t) = s_P + s_H(t) = \theta_c + A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau_O}\right)$

On applique alors la condition initiale en traduisant la continuité de la température à l'instant t=0 : $\theta(t=0) = \theta_e = \theta_c + A$

On obtient finalement : $\boxed{\theta(t) = \theta_c + \left(\theta_e - \theta_c\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau_O}\right)}$

7. On traduit la définition de $t_{95\%}$: $\left(\theta(t_{95\%}) - \theta_c\right) = 0{,}05\left(\theta_e - \theta_c\right)$ par : $\boxed{t_{95\%} = \tau_O \ln 20}$ A.N : $\boxed{t_1 = 6h15\,\text{min}}$

<u>Premier procédé. Démarrage forcé.</u>

8. Le bilan thermique se traduit par : $\Phi_O + 9\Phi_O\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) = C_{th}\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{1}{R_{th}}\left(\theta(t) - \theta_e\right)$ ce qui donne en introduisant τ_O et θ_C : $\boxed{\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{1}{\tau_O}\theta(t) = \dfrac{1}{\tau_O}\left[\theta_c + 9\left(\theta_C - \theta_e\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right]}$ (2)

9. La solution générale de l'équation homogène associée reste $\boxed{s_H(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau_O}\right)}$

10. On la cherche la solution particulière sous la forme $S_P(t) = C + B\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

On la réintroduit dans l'équation différentielle : $\dfrac{1}{\tau_O}C + B\left(\dfrac{1}{\tau_O} - \dfrac{1}{\tau}\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) = \dfrac{1}{\tau_O}\left[\theta_c + 9\left(\theta_C - \theta_e\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right]$

Pour que cette relation soit vraie quel que soit t, il faut que $\boxed{C = \theta_c}$ et que $\boxed{B = \dfrac{9\tau}{\tau - \tau_O}\left(\theta_C - \theta_e\right)}$

11. La solution générale de l'équation est alors : $s(t) = \theta_c + \dfrac{9\tau}{\tau - \tau_O}\left(\theta_c - \theta_e\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau_O}\right)$

La condition initiale donne alors : $\theta_e = \theta_c + \dfrac{9\tau}{\tau - \tau_O}\left(\theta_c - \theta_e\right) + A$

On obtient finalement : $\boxed{\theta(t) = \theta_c + \dfrac{9\tau}{\tau - \tau_O}\left(\theta_c - \theta_e\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + \dfrac{\tau_O - 10\tau}{\tau - \tau_O}\left(\theta_c - \theta_e\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau_O}\right)}$

12. En choisissant $\tau = \tau_O/10$, on annule la composante issue du régime transitoire de la première configuration. La température s'exprime alors : $\boxed{\theta(t) = \theta_c - \left(\theta_c - \theta_e\right)\exp\left(-10\dfrac{t}{\tau_O}\right)}$

On traduit la définition de $t_{95\%}$' : $\left(\theta(t_{95\%}') - \theta_c\right) = 0{,}05\left(\theta_e - \theta_c\right)$ par : $\boxed{t_{95\%'} = \dfrac{\tau_O}{10}\ln 20}$ A.N : $\boxed{t_1 = 12\,\text{min}\,30\,\text{sec}}$