Filtrage linéaire d'un signal périodique.

1. Signaux périodiques et décomposition en série de Fourier.

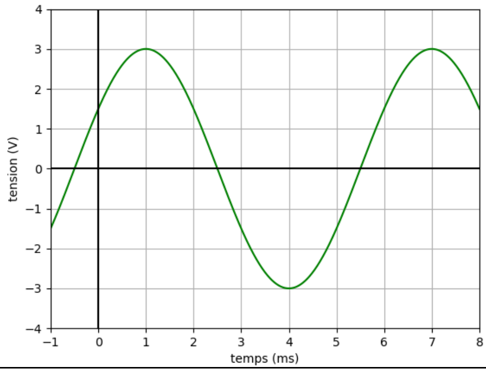
1.1. Signaux sinusoïdaux dits harmoniques.

On considère le signal sinusoïdal suivant : $s(t) = s_O \cos\left(\omega.t + \varphi_O\right) = s_O \cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\left(t - t_O\right)\right)$.

Il est caractérisé par :

- Son amplitude : s_O.
- Sa pulsation ω, sa fréquence f et sa période T sont liées par : $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega}$
- Sa phase à l'origine φ_0 qui donne l'avance de phase du signal sur le signal de référence $\cos\left(\omega.t\right)$ et qui est relié au retard temporel t_O par la relation $\dfrac{\varphi_O}{2\pi} = -\dfrac{t_O}{T}$

La représentation graphique d'un signal harmonique est la suivante :



➢ Faire la lecture graphique de l'amplitude, de la période et du retard pour le signal représenté et en déduire la pulsation et la phase à l'origine.

<u>Définition</u> : la valeur moyenne d'un signal périodique de période T s'exprime : $\left\langle s(t)\right\rangle_T = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_O}^{t_O+T} s(t)dt$

On obtient alors pour le signal sinusoïdal : $\left\langle s_1(t)\right\rangle_T = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_O}^{t_O+T} s_O\cos(\omega t + \varphi_O)dt = \dfrac{s_O}{\omega T}\left[\sin(\omega t + \varphi_O)\right]_{t_O}^{t_O+T} = 0$

<u>Un signal sinusoïdal « pur » est de moyenne nulle.</u>

Définition : La valeur efficace d'un signal périodique de période T s'exprime : $\boxed{s_{eff} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_O}^{t_O+T} s^2(t)dt}}$

On obtient alors pour le signal sinusoïdal : $s_{eff}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_O}^{t_O+T} s_O^2\cos^2(\omega t + \varphi_O)dt$

Par relation de trigonométrie $s_{eff}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_O}^{t_O+T} \dfrac{s_O^2}{2}\left(\cos\left(2\omega t + 2\varphi_O\right) + 1\right)dt = \dfrac{s_O^2}{2T}\left[\dfrac{1}{2\omega}\sin\left(2\omega t + 2\varphi_O\right) + t\right]_{t_O}^{t_O+T}$

<u>Un signal sinusoïdal « pur » présente une valeur efficace :</u> $\boxed{s_{1,eff} = \dfrac{s_O}{\sqrt{2}}}$

1.2. Signaux périodiques : exemple du signal créneau et du signal triangle.

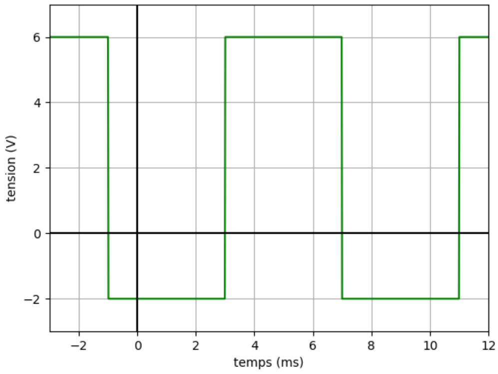
a. <u>Signal créneau.</u>

On appelle signal créneau un signal périodique de période T prenant une valeur E_{max} sur une demi période et une valeur E_{min} sur l'autre demi période et s'écrivant donc sous la forme :

$$s_{créneau}(t) = \begin{cases} E_{\max} & si \quad t_O \le t < t_O + \dfrac{T}{2} \\ E_{\min} & si \quad t_O + \dfrac{T}{2} \le t < t_O + T \end{cases}$$

et on obtient le reste du signal en exploitant la périodicité temporelle T.

La représentation graphique de ce signal présente l'allure suivante :



- Faire la lecture graphique de la valeur maximale, de la valeur minimale, de la période et de l'instant t_O pour le signal représenté et en déduire l'amplitude et la valeur moyenne.

Pour ce signal périodique, la valeur moyenne s'exprime par définition par $\langle s_{créneau}(t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_{t_O}^{t_O+T} s_{créneau}(t)dt$

On en déduit que $\langle s_{créneau}(t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_{t_O}^{t_O+T/2} E_{\max}dt + \frac{1}{T}\int_{t_O+T/2}^{t_O+T} E_{\min}dt$

puis $\boxed{\langle s_{créneau}(t)\rangle_T = \frac{E_{\max}+E_{\min}}{2}}$ et on appelle alors amplitude de ce signal $\boxed{A = \frac{E_{\max}-E_{\min}}{2}}$

La valeur efficace de ce signal s'exprime alors : $s^2_{créneau,eff} = \frac{1}{T}\int_{t_O}^{t_O+T/2} E^2_{\max}dt + \frac{1}{T}\int_{t_O+T/2}^{t_O+T} E^2_{\min}dt$ ce qui donne

$\boxed{s_{créneau,eff} = \sqrt{\frac{E^2_{\max}+E^2_{\min}}{2}}}$ pour un signal de moyenne nulle $E_{max}=-E_{min}=E_O$ $\boxed{s_{créneau,eff} = E_O}$

b. Signal triangle.

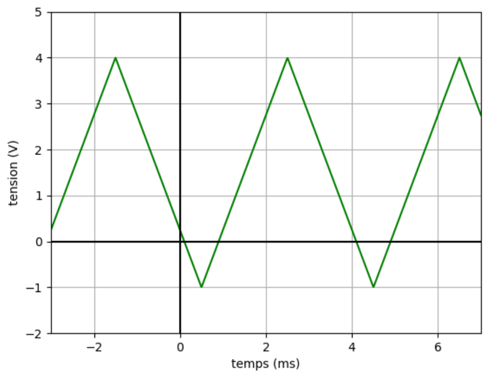
On appelle signal triangle un signal périodique de période T en dent de scie symétrique de valeur maximale E_{max} et de valeur minimale E_{min}.

Ce signal présente donc une pente $p = \frac{E_{\max}-E_{\min}}{T/2}$ pendant une demi période et une pente $p' = \frac{E_{\min}-E_{\max}}{T/2}$ pendant l'autre demi période, il peut s'exprimer sous la forme :

$$s_{tri}(t) = \begin{cases} \frac{2(E_{\max}-E_{\min})}{T}.(t-t_O)+E_{\min} & si \quad t_O \le t < t_O + \frac{T}{2} \\ \frac{2(E_{\min}-E_{\max})}{T}.\left(t-t_O-\frac{T}{2}\right)+E_{\max} & si \quad t_O+\frac{T}{2} \le t < t_O + T \end{cases}$$

et on obtient le reste du signal en exploitant la périodicité temporelle T.

La représentation graphique de ce signal présente l'allure suivante :



- Faire la lecture graphique de la valeur maximale, de la valeur minimale, de la période et de l'instant t_O pour le signal représenté et en déduire l'amplitude et la valeur moyenne.

Pour ce signal périodique, la valeur moyenne s'exprime par définition par $\langle s_{tri}(t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_{t_O}^{t_O+T} s_{tri}(t)dt$

On va restreindre l'étude au cas où $t_O=0$, pour simplifier les notations.

alors $\langle s_{tri}(t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^{T/2}\left[\frac{2(E_{\max}-E_{\min})}{T}.t+E_{\min}\right]dt + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T}\left[\frac{2(E_{\min}-E_{\max})}{T}.\left(t-\frac{T}{2}\right)+E_{\max}\right]dt$

puis $\left\langle s_{tri}(t)\right\rangle_T = \frac{1}{T}\left[\frac{\left(E_{\max}-E_{\min}\right)}{T}.t^2+E_{\min}t\right]_0^{T/2}+\frac{1}{T}\left[\frac{\left(E_{\min}-E_{\max}\right)}{T}.\left(t-\frac{T}{2}\right)^2+E_{\max}t\right]_{T/2}^{T}$

.d'où $\left\langle s_{tri}(t)\right\rangle_T = \left(\frac{\left(E_{\max}-E_{\min}\right)}{4}+\frac{E_{\min}}{2}\right)+\left(\frac{\left(E_{\min}-E_{\max}\right)}{4}+\frac{E_{\max}}{2}\right)$

Finalement $\boxed{\left\langle s_{tri}(t)\right\rangle_T = \frac{E_{\max}+E_{\min}}{2}}$ On appelle alors amplitude de ce signal $\boxed{A=\frac{E_{\max}-E_{\min}}{2}}$

La valeur efficace de ce signal s'exprime alors :

$$s_{tri,eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^{T/2}\left[\frac{2\left(E_{\max}-E_{\min}\right)}{T}.t+E_{\min}\right]^2 dt+\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T}\left[\frac{2\left(E_{\min}-E_{\max}\right)}{T}.\left(t-\frac{T}{2}\right)+E_{\max}\right]^2 dt$$

$$s_{tri,eff}^2 = \frac{1}{6\left(E_{\max}-E_{\min}\right)}\left[\left(\frac{2\left(E_{\max}-E_{\min}\right)}{T}.t+E_{\min}\right)^3\right]_0^{T/2}+\frac{1}{6\left(E_{\min}-E_{\max}\right)}\left[\left(\frac{2\left(E_{\min}-E_{\max}\right)}{T}.\left(t-\frac{T}{2}\right)+E_{\max}\right)^3\right]_{T/2}^{T}$$

$$s_{tri,eff}^2 = \frac{1}{6\left(E_{\max}-E_{\min}\right)}\left(E_{\max}^3-E_{\min}^3\right)+\frac{1}{6\left(E_{\min}-E_{\max}\right)}\left(E_{\min}^3-E_{\max}^3\right)$$

$s_{tri,eff}^2 = \frac{E_{\max}^3-E_{\min}^3}{3\left(E_{\max}-E_{\min}\right)} = \frac{E_{\max}^2+E_{\max}E_{\min}+E_{\min}^2}{3}$ ce qui donne

$\boxed{s_{tri,eff} = \sqrt{\frac{E_{\max}^2+E_{\max}E_{\min}+E_{\min}^2}{3}}}$ pour un triangle de moyenne nulle $E_{max}=-E_{min}=E_O$ $\boxed{s_{tri,eff} = \frac{E_O}{\sqrt{3}}}$

1.3. Décomposition d'un signal périodique en une « somme de fonctions sinusoïdales ». Série de Fourier.

a. <u>Analyse de Fourier d'un signal périodique. La théorie.</u>

La théorie de Fourier affirme que tout signal périodique f(t) de période $T=\frac{2\pi}{\omega_F}$ peut s'exprimer sous la forme d'une série de Fourier : $\boxed{f(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k\cos\left(k\omega_F t+\varphi_k\right)}$

Pour laquelle :

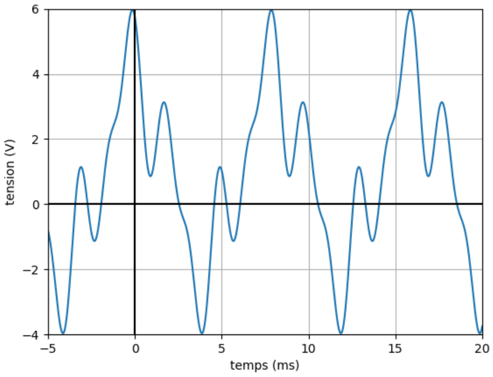
- Le terme de rang nul (k=0) c'est-à-dire c_O est la moyenne du signal périodique étudié.
- le terme de rang un est nommé le fondamental et $\omega_F=2\pi/T$ est la pulsation du fondamental.
- chacun des termes de rang k de pulsation $\omega_k = k\omega_f$ est appelé harmonique de rang k du signal.

b. <u>Quelques exemples concrets : somme de trois signaux sinusoïdaux et d'une composante continue.</u>

On étudie dans ce premier exemple un cas simple où le signal périodique présente :

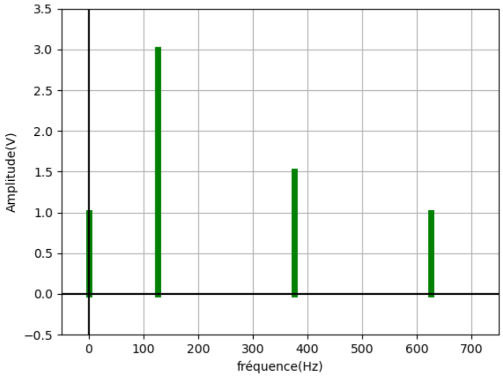
- Une composante constante s_O.
- Une composante fondamentale d'amplitude s_1 et de pulsation ω_F.
- Une harmonique de rang 3 d'amplitude s_3 et de pulsation $3\omega_F$.
- Une harmonique de rang 5 d'amplitude s_5 et de pulsation $5\omega_F$.

Une représentation graphique de ce signal est donnée ci-dessous :



- ➢ Déterminer la période de ce signal.
- ➢ En déduire la fréquence fondamentale et la pulsation fondamentale.
- ➢ En déduire les fréquences et les pulsations des deux harmoniques.
- ➢ Déterminer la valeur moyenne du signal.

Pour accéder aux amplitudes des composantes de ce signal, on procède à une analyse de Fourier qui est disponible sur de nombreux logiciels de traitement des signaux, nous illustrerons ce point en TP. L'analyse de Fourier fournit le spectre du signal, en donnant l'amplitude de chacune des harmoniques qui composent le signal. On obtient pour le signal représenté ci-dessus le spectre suivant :



- Analyser ce spectre pour en extraire la valeur moyenne du signal et vérifier la cohérence avec l''étude précédente.
- Analyser ce spectre pour en extraire les amplitudes du fondamental et des harmoniques.
- Quels éléments descriptifs du signal étudié ne peuvent pas être obtenus par étude du spectre ?

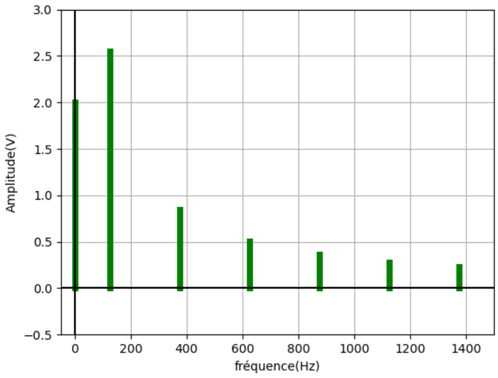
c. Quelques exemples concrets : signal créneau.

Pour un signal créneau impair (pour lequel $t_O=0$), la décomposition en série de Fourier est donnée par la relation suivante : $s_{créneau}(t)=\langle s_{créneau}\rangle_T+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4A}{\pi(2k+1)}\sin\left((2k+1)\omega_F t\right)$.

On notera que dans cette décomposition :

- La valeur moyenne est donnée par la composante constante de fréquence nulle.
- Il y a un signal fondamental (k=0).
- Il y a en théorie une infinité d'harmoniques impaires.

Pour le signal créneau représenté en partie 1.2, on obtient le spectre suivant :



- Analyser ce spectre pour retrouver la valeur moyenne du signal créneau, la fréquence fondamentale f_F et la période temporelle T.
- Vérifier que seules les harmoniques impaires sont présentes et vérifier que leur amplitude est donnée par l'expression donnée ci-dessus.

Animation Flash sur Fourier

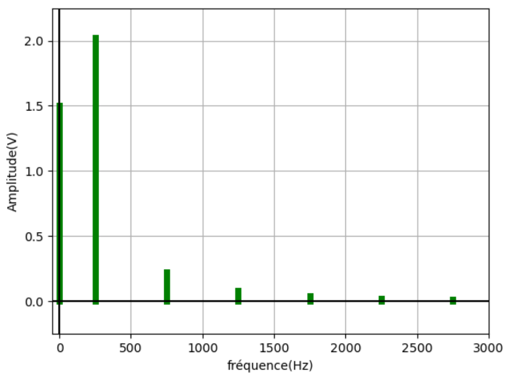
d. Quelques exemples concrets : signal triangle.

Pour un signal triangle pair (pour lequel $t_O=T/2$), la décomposition en série de Fourier est donnée par la relation suivante : $s_{tri}(t)=\langle s_{tri}\rangle_T+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{8A}{\pi(2k+1)^2}\cos\left((2k+1)\omega_F t\right)$.

On notera que dans cette décomposition :

- La valeur moyenne est donnée par la composante constante de fréquence nulle.
- Il y a un signal fondamental (k=0).
- Il y a en théorie une infinité d'harmoniques impaires.

Pour le signal triangle représenté en partie 1.2, on obtient le spectre suivant :



e. <u>Relation donnant la valeur efficace du signal en fonction des amplitudes des harmoniques</u>.

Pour un signal périodique dont on connait la décomposition en série de Fourier, on peut noter le résultat remarquable suivant : La valeur efficace du signal périodique est la somme des valeurs efficaces des composantes du signal ce qui se traduit par la relation dite de Parseval : $f_{eff}^2 = c_O^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k^2}{2}$.

On a déjà rencontré dans le cadre du cours de cette année, et dans les années précédentes, des expressions donnant l'énergie associées à un signal :

- Pour un condens ateur soumis à une tension u(t), l'énergie stockée dans le condensateur est $\frac{1}{2}Cu^2(t)$
- Pour un point matériel de vitesse $\vec{v}(t)$, l'énergie cinétique associée est $\frac{1}{2}m\vec{v}^2(t)$

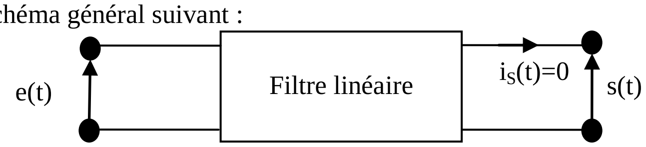
En généralisant cette idée, l'énergie associée à un signal qui se transmet dans un circuit en électrocinétique sera proportionnelle au carré de ce signal. La formule de Parseval s'interprète alors de la manière suivante : l'énergie associée à un signal est la somme des énergies associées à chacune des composantes harmoniques de ce signal.

2. Description générale des filtres linéaires.

2.1. Principe d'étude.

De manière générale, on schématise un filtre par un quadrupôle. **<u>On décrira ici le cas où le signal d'entrée sur le filtre et le signal de sortie du filtre sont des tensions.</u>**

On considère donc le schéma général suivant :



Pour comprendre l'effet d'un filtre sur un signal, on s'appuie sur l'analyse de Fourier. On commence donc par étudier l'effet du filtre sur un signal sinusoïdal, et on se placera dans le cadre d'étude du régime sinusoïdal forcé.
On utilisera donc les notations complexes :

- Signal d'entrée harmonique : $e(t) = e_O \cos(\omega t) = \mathrm{Re}(\underline{e}(t))$ avec $\underline{e}(t) = e_O \exp(j\omega t)$
- Signal de sortie harmonique : $s(t) = s_O \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}(\underline{s}(t))$ avec $\underline{s}(t) = \underline{s}_O \exp(j\omega t)$

Dans notre étude, on étudiera le filtre seul sans tenir compte de la manière dont est réalisé le signal d'entrée ni de la composition du circuit se trouvant en sortie du filtre. En particulier, la sortie du filtre sera alors toujours considérée comme étant connectée sur un coupe circuit.
Ceci implique que **<u>l'on considère toujours le filtre en « sortie ouverte » ce qui se traduit en électrocinétique par une intensité du courant délivré en sortie nulle :</u>** $i_S(t) = 0$

Le filtre est un circuit linéaire, ou fonctionnant en régime linéaire, la tension de sortie est donc liée à la tension d'entrée par une équation différentielle linéaire que l'on caractérise par son ordre n.
Par exemple, le circuit RC est un filtre d'ordre 1 dont l'équation différentielle donnant la tension en sortie aux bornes du condensateur en fonction de la tension d'entrée aux bornes de (RC) en série s'écrit :

$$\frac{ds}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}s(t) = \frac{1}{\tau}e(t)$$

Par le passage en notation complexe, cette équation différentielle linéaire se traduit en un polynôme d'ordre n liant les tensions d'entrée et de sortie en notation complexe. Pour le circuit RC, on obtient alors :

$$\underline{s}(t) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}\underline{e}(t)$$

2.2. Fonction de transfert.

<u>Définition</u> : On caractérise un filtre d'ordre n par sa fonction de transfert définie comme le rapport du signal harmonique de sortie sur le signal harmonique d'entrée en notation complexe. On la note en général $\underline{H}(j\omega)$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(a_k \frac{d^k s}{dt^k}(t) + b_k \frac{d^k e}{dt^k}(t)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{s}_O}{\underline{e}_O} = \frac{\sum_{k=0}^{n}\left(b_k (j\omega)^k\right)}{\sum_{k=0}^{n}\left(-a_k (j\omega)^k\right)}$$

Dans le cours de cette année, on se contentera des cas classiques des filtres d'ordre 1 et 2.

Par exemple pour le circuit RC série, la fonction de transfert s'écrit : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$

2.3. Gain, gain en décibel et phase.

La fonction de transfert d'un filtre est une fonction dans le corps des complexes, on la caractérisera en étudiant :

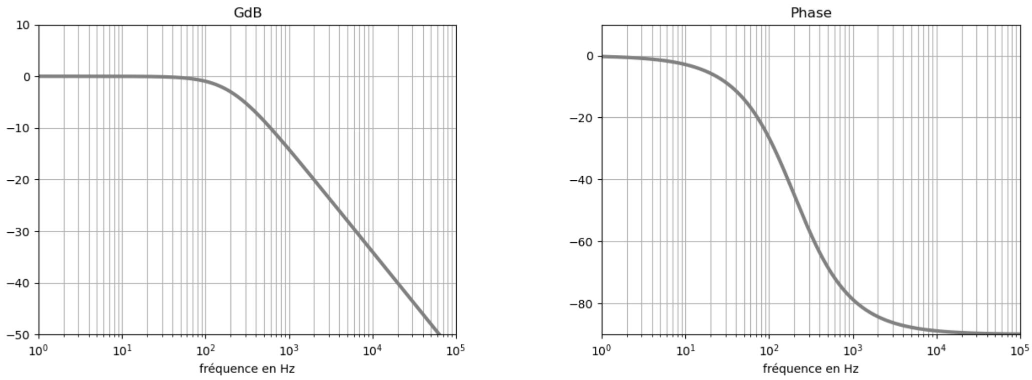
- Le module de cette fonction de transfert pour définir le gain en amplitude du filtre : $\boxed{G(\omega)=|\underline{H}(j\omega)|}$.
  On définit également le gain en décibel d'un filtre par la relation : $\boxed{G_{dB}(\omega)=20\log(G(\omega))=20\log|\underline{H}(j\omega)|}$
- L'argument de cette fonction de transfert que l'on caractérisera par le déphasage introduit par le filtre : $\boxed{\varphi(\omega)=\arg(\underline{H}(j\omega))}$

2.4. Diagramme de Bode.

<u>Définition</u> : Le diagramme de Bode associé à un filtre est la représentation des deux courbes suivantes :

- Le diagramme de Bode en amplitude où on représente le gain en décibel $G_{dB}(\omega)$ en fonction de $\log\omega$.
- Le diagramme de Bode en phase où on représente le déphasage $\varphi(\omega)$ en fonction de $\log\omega$.

<u>Exemple du diagramme de Bode du circuit RC.</u>



- ➢ Si on envoie en entrée du circuit un signal sinusoïdal de fréquence 10Hz, le gain en décibel et nul, le gain est donc unitaire, et la phase est quasiment nulle.

Ce qui veut dire que la fonction de transfert prend une valeur unitaire $\underline{H}(j\omega)=\dfrac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}=1$ Ce signal sera transmis en sortie sans modification.

- ➢ D'autre part, si on envoie en entrée du circuit un signal sinusoïdal de fréquence 2.10^3Hz, le gain en décibel prend la valeur -20dB, le gain est donc de 0,1, et la phase est de -60° soit –π/3.

La fonction de transfert s'exprime alors $\underline{H}(j\omega)=\dfrac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}=0{,}1.\exp\left(-j\dfrac{\pi}{3}\right)$

Le signal sera alors transmis en voyant son amplitude divisée par 10 et subira un retard de phase de π/3 par rapport au signal sinusoïdal en entrée.

<u>Ce circuit laissera passer les signaux de basse fréquence sans les modifier et réduira l'amplitude des signaux de haute fréquence. On parlera donc d'un circuit passe bas.</u>

3. Les filtres d'ordre 1.

3.1. Les filtres passe bas d'ordre 1.

a. <u>Définition.</u>

Un filtre est dans la catégorie des filtres passe-bas d'ordre 1, lorsque sa fonction de transfert peut s'écrire sous la forme canonique suivante : $\underline{H}(j\omega)=\dfrac{H_O}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_O}}$ où H_O est le gain statique et ω_O est la pulsation propre du filtre.

On pose alors la pulsation réduite : $x=\dfrac{\omega}{\omega_O}$ et on obtient : $\underline{H}(jx)=\dfrac{H_O}{1+jx}$

b. <u>Expression du gain, du gain en décibel et de la phase.</u>

- Le gain s'exprime : $G(x)=\dfrac{|H_O|}{\sqrt{1+x^2}}$
- le gain en décibel s'exprime : $G_{dB}(\omega)=20\log G(x)=20\log|H_O|-10\log(1+x^2)$
- La phase s'exprime : $\varphi(\omega)=\arg(\underline{H}(j\omega))=\arg(H_O)-\arctan(x)$

c. Etude asymptotique.

On étudie tout d'abord les comportements asymptotiques de la fonction de transfert, du gain en décibel et de la phase, c'est-à-dire les comportements limites de ces deux fonctions sur les domaines de pulsations particuliers.

Comportement basse fréquence : $x \ll 1$

- La fonction de transfert peut être approximée par l'expression : $\underline{H}(jx) = H_O$
- Le gain prend une valeur constante : $G(x) = |H_O|$
- Le gain en décibel présente une limite finie $G_{dB}(x) \xrightarrow{x \to 0} 20\log|H_O|$.
- La phase présente également une limite finie, la courbe représentative présentera une asymptote horizontale pour la valeur : $\varphi(\omega) \xrightarrow{x \to 0} \arg(H_O)$

Comportement haute fréquence : $x \gg 1$

- La fonction de transfert peut être approximée par l'expression : $\underline{H}(jx) = \dfrac{H_O}{jx}$
- Le gain prend l'expression approché suivante : $G(x) = \dfrac{|H_O|}{x}$
- Le gain en décibel présente un comportement divergent vers -∞. On cherche un équivalent pour caractériser la façon dont se comporte la courbe représentative.
$$G_{dB}(\omega) = 20\log|\underline{H}(j\omega)| \xrightarrow{x \to +\infty} 20\log|H_O| - 20\log(x)$$
- La phase présente une limite finie, la courbe représentative présentera une asymptote horizontale pour la valeur : $\varphi(\omega) \xrightarrow{x \to +\infty} \arg(H_O) - \pi/2$

Comportement à la fréquence propre : $x = 1$

- La fonction de transfert s'exprime alors : $\underline{H}(jx) = \dfrac{H_O}{1+j}$
- Le gain s'exprime : $G(x) = \dfrac{|H_O|}{\sqrt{2}}$
- Le gain en décibel prend la valeur particulière : $G_{dB}(1) = 20\log|H_O| - 10\log 2$
- La phase prend la valeur particulière : $\varphi(1) = \arg(H_O) - \dfrac{\pi}{4}$

d. Fréquence de coupure et bande passante.

Définition : On appelle pulsation de coupure à -3dB la valeur de pulsation ω_C pour laquelle le gain en décibel prend une valeur de -3dB en dessous de la valeur maximale. $G_{dB}(\omega_C) = G_{dB;\max} - 3dB$

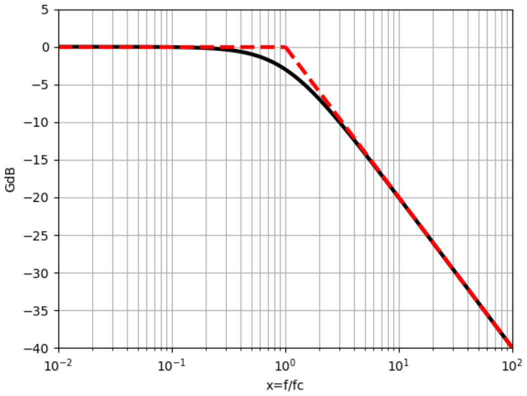
Cette définition se traduit pour le gain par la relation $G(\omega_C) = \dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}}$

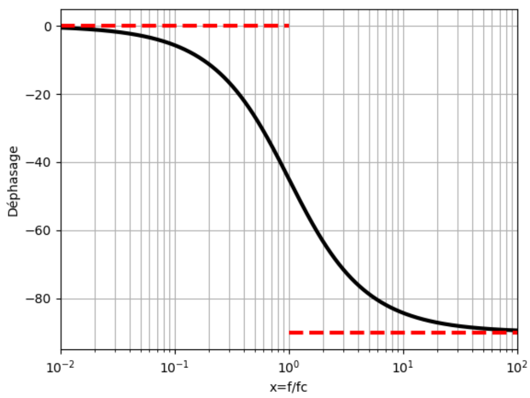
On appelle bande passante le domaine de pulsation pour lequel le gain est supérieur au gain pour la pulsation de coupure.

Pour le filtre passe bas d'ordre 1, on obtient : $\omega_C = \omega_O$. La bande passante est le domaine de pulsation : $[0, \omega_C]$

e. Diagramme de Bode.

Sur le diagramme de Bode, on fait figurer les asymptotes correspondant aux comportements particuliers du gain en décibel et de la phase, ainsi qu'une courbe approximative du comportement « vrai » de ces fonctions.





f. Comportement asymptotique et effet sur un signal sinusoïdal.

Pour le diagramme de Bode précédent, on identifie deux comportements asymptotiques :

- Une asymptote horizontale, sur le domaine de pulsation inférieure à la pulsation de coupure :

Si on impose en entrée du filtre un signal sinusoïdal de pulsation appartenant à ce domaine, le signal est simplement multiplié par le gain statique du filtre dont on peut déterminer la valeur par lecture graphique du gain en décibel.

- Une asymptote oblique de pente -20dB/décade, sur le domaine de pulsation supérieure à ω_C.

Cette asymptote oblique de pente -20dB par décade correspond à une fonction de transfert qui s'écrit sous la forme approchée : $\underline{H}(jx) = \frac{H_O}{jx}$ d'où le lien entrée-sortie en notation complexe : $jx.\underline{s}(t) = H_O \underline{e}(t)$

Le retour aux notations réelles amène alors à la relation suivante : $\frac{ds}{dt}(t) = H_O \omega_O e(t)$

Conclusion : Lorsqu'on identifie sur le diagramme de Bode une asymptote oblique de pente **-20dB/dec** sur un domaine, on est assuré que le filtre présentera un comportement **intégrateur** sur ce domaine.

3.2. Filtre passe haut d'ordre 1.

a. Définition.

Un filtre est appelé passe-haut d'ordre 1, lorsque sa fonction de transfert peut s'écrire sous la forme canonique suivante : $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_O . j \frac{\omega}{\omega_O}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_O}}$ où H_O est le gain statique et ω_O est la pulsation propre du filtre.

On pose alors la pulsation réduite : $x = \frac{\omega}{\omega_O}$ et on obtient : $\underline{H}(jx) = \frac{H_O . jx}{1 + jx}$

b. Expression du gain, gain en décibel et de la phase.

- Le gain s'exprime : $G(x) = \frac{|H_O| x}{\sqrt{1+x^2}}$
- le gain en décibel s'exprime : $G_{dB}(\omega) = 20 \log G(x) = 20 \log |H_O| + 10 \log \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)$
- La phase s'exprime : $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg(H_O) + \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$

c. Etude asymptotique.

Comportement basse fréquence : $x << 1$

- La fonction de transfert peut être approximée par la relation : $\underline{H}(jx) = H_O . jx$
- Le gain prend l'expression approchée : $G(x) = |H_O| x$
- Le gain en décibel présente alors un comportement divergent vers -∞, $G_{dB}(\omega) \xrightarrow{x \to 0} 20 \log |H_O| + 20 \log x$
- La phase présente également une limite finie, la courbe représentative présentera une asymptote horizontale pour la valeur : $\varphi(\omega) \xrightarrow{x \to 0} \arg(H_O) + \frac{\pi}{2}$

Comportement haute fréquence : $x >> 1$

- La fonction de transfert peut être approximée par la relation : $\underline{H}(jx) = H_O$
- Le gain prend l'expression approchée : $G(x) = |H_O|$
- Le gain en décibel présente alors une limite finie. $G_{dB}(\omega) \xrightarrow{x \to +\infty} 20 \log |H_O|$
- La phase présente également une limite finie, la courbe représentative présentera une asymptote horizontale pour la valeur $\varphi(\omega) \xrightarrow{x \to +\infty} \arg(H_O)$

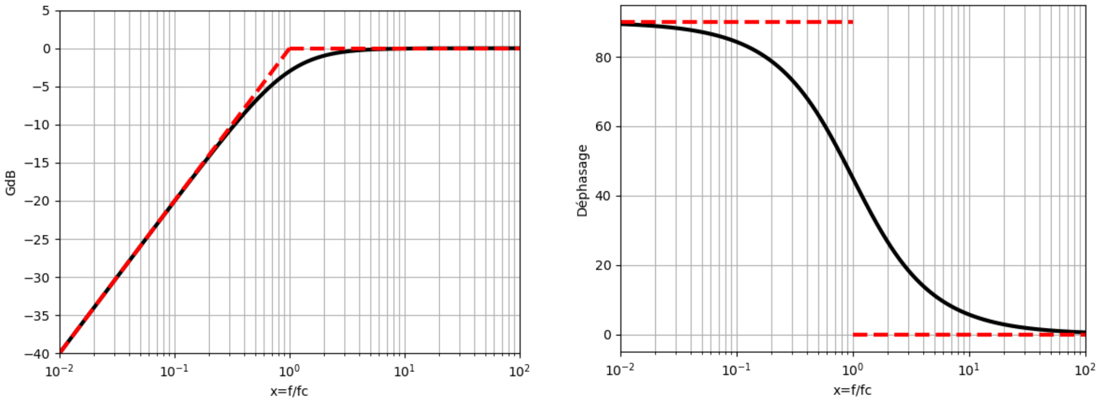
Comportement à la fréquence propre : $x = 1$

- La fonction de transfert s'exprime alors : $\underline{H}(jx) = \frac{jH_O}{1+j}$
- Le gain s'exprime : $G(x) = \frac{|H_O|}{\sqrt{2}}$
- Le gain en décibel prend la valeur particulière : $G_{dB}(1) = 20 \log |H_O| - 10 \log 2$
- La phase prend la valeur particulière : $\varphi(1) = \arg(H_O) + \frac{\pi}{4}$

Pour le filtre passe haut d'ordre 1, on obtient pour fréquence de coupure: $\omega_C = \omega_O$.

La bande passante est le domaine de pulsation : $[\omega_C, +\infty]$

d. Diagramme de Bode



e. Comportement asymptotique et effet sur un signal sinusoïdal.

Pour le diagramme de Bode précédent, on identifie deux comportements asymptotiques :

- Une asymptote horizontale, sur le domaine de pulsation supérieure à la pulsation de coupure :

Si on impose en entrée du filtre un signal sinusoïdal de pulsation appartenant à ce domaine, le signal est simplement multiplié par le gain statique du filtre dont on peut déterminer la valeur par lecture graphique du gain en décibel.

- Une asymptote oblique de pente +20dB par décade, sur le domaine de pulsation inférieure à la pulsation de coupure.

Si on impose en entrée du filtre un signal sinusoïdal de pulsation appartenant à ce domaine, on réalisera une dérivation de ce signal.

En reprenant l'étude asymptotique précédente, on observe que l'asymptote oblique de pente +20dB par décade correspond à une fonction de transfert qui s'écrit sous la forme approchée : $\underline{H}(jx) = jxH_O$

Le lien entre la tension d'entrée et la tension de sortie est donc en notation complexe : $\underline{s}(t) = jxH_O\underline{e}(t)$

Le retour aux notations réelles amène alors à la relation suivante : $s(t) = \dfrac{H_O}{\omega_O}\dfrac{de}{dt}(t)$

<u>Conclusion</u> : Lorsqu'on identifie sur le diagramme de Bode une asymptote oblique de pente **<u>+20dB/dec</u>** sur un domaine, on est assuré que le filtre présentera un comportement **<u>dérivateur</u>** sur ce domaine.

4. Les filtres d'ordre 2.

4.1. Filtres passe bas d'ordre 2.

a. Définition :

Un filtre est appelé passe-bas d'ordre 2, lorsque sa fonction de transfert peut s'écrire sous la forme canonique :

$\underline{H}(j\omega) = \dfrac{H_O}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_O} - \dfrac{\omega^2}{\omega_O^2}}$ où H_O est le gain statique, ω_O est la pulsation propre et Q le facteur de qualité du filtre.

On pose alors la pulsation réduite : $x = \dfrac{\omega}{\omega_O}$ et on obtient : $\underline{H}(jx) = \dfrac{H_O}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$

b. Expression du gain, du gain en décibel et de la phase.

- Le gain s'exprime : $G(x) = \dfrac{|H_O|}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2}}$

- le gain en décibel s'exprime : $G_{dB}(x) = 20\log G(x) = 20\log|H_O| - 10\log\left((1-x^2)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2\right)$

- La phase s'exprime : $\varphi(x) = \arg(\underline{H}(jx)) = \arg(H_O) - \arctan\left(\dfrac{x}{Q(1-x^2)}\right)$

c. Etude asymptotique.

Comportement basse fréquence : $x << 1$

- La fonction de transfert peut s'approximer par : $\underline{H}(jx) = H_O$
- Le gain en décibel présente alors une limite finie, la courbe représentative présentera une asymptote horizontale : $G_{dB}(\omega) \xrightarrow{x \to 0} 20 \log |H_O|$
- La phase présente également une limite finie, la courbe représentative présentera une asymptote horizontale pour la valeur : $\varphi(\omega) \xrightarrow{x \to 0} \arg(H_O)$

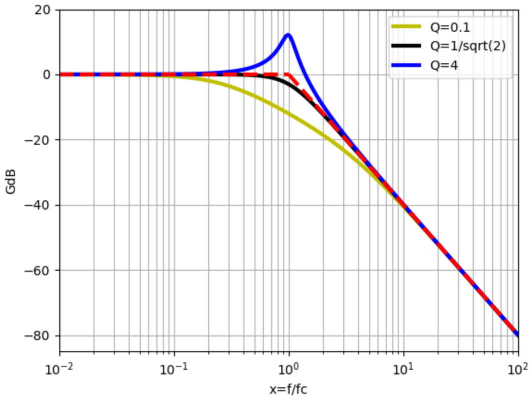
Comportement haute fréquence : $x >> 1$

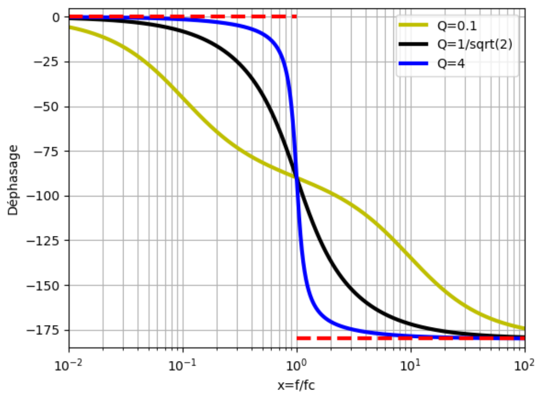
- La fonction de transfert peut s'approximer par : $\underline{H}(jx) = -\dfrac{H_O}{x^2}$
- La courbe présentera une asymptote oblique.
$$G_{dB}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(j\omega)| \xrightarrow{x \to +\infty} 20 \log |H_O| - 40 \log x$$
L'asymptote oblique présente une pente de -40dB/Décade.
- La phase présente également une limite finie, la courbe représentative présentera une asymptote horizontale pour la valeur : $\varphi(\omega) \xrightarrow{x \to +\infty} \arg(H_O) - \pi$

Comportement à la fréquence propre : $x = 1$

- La fonction de transfert s'exprime : $\underline{H}(jx) = -jQH_O$
- Le gain en décibel prend la valeur particulière : $G_{dB}(1) = 20 \log |H_O| + 20 \log Q$
- La phase prend la valeur particulière : $\varphi(1) = \arg(H_O) - \dfrac{\pi}{2}$

d. Représentation du diagramme de Bode.





En vert : Q=0,1 ; en noir : $Q = 1/\sqrt{2}$; En bleu Q=4.

e. Observations

Cas $Q << 1/\sqrt{2}$: on observe une plage de valeurs de pulsation centrée autour de x=1 pour laquelle la courbe de gain s'assimile à une droite de pente -20dB et la courbe de phase varie peu autour de la valeur –π/2.

Cas $Q >> 1/\sqrt{2}$: on sait que le circuit RLC présente une résonnance en tension pour $Q > 1/\sqrt{2}$. On retrouve cette caractéristique sur le diagramme de Bode

Cas $Q = 1/\sqrt{2}$: dans le cas où Q prend la valeur $1/\sqrt{2}$, le filtre ne présente pas de plage de résonnance et sa pulsation de coupure est $\omega_C = \omega_O$.

Si on souhaite obtenir un filtre passe bas d'ordre 2, qui atténue deux fois plus les signaux haute fréquence qu'un filtre d'ordre 1, et pour lequel on souhaite avoir une pulsation de coupure facilement calculée car identique à la pulsation propre $\boxed{\omega_C = \omega_O}$**, on devra prendre soin de le concevoir avec un facteur de qualité prenant cette valeur** $\boxed{Q = 1/\sqrt{2}}$.

4.2. Filtre passe haut d'ordre 2.

a. Définition.

Un filtre est appelé passe-haut d'ordre 2, lorsque sa fonction de transfert peut s'écrire sous la forme canonique :

$\underline{H}(j\omega)=\dfrac{H_O\left(-\dfrac{\omega^2}{\omega_O^2}\right)}{1+j\dfrac{\omega}{Q\omega_O}-\dfrac{\omega^2}{\omega_O^2}}$ où H_O est le gain statique, ω_O est la pulsation propre et Q le facteur de qualité du filtre.

On pose alors la pulsation réduite : $x=\dfrac{\omega}{\omega_O}$ et on obtient : $\underline{H}(jx)=\dfrac{H_O\left(-x^2\right)}{1+j\dfrac{x}{Q}-x^2}$

b. Expression du gain en décibel et de la phase.

Pour le filtre passe haut d'ordre 2 :

-
- le gain en décibel s'exprime : $G_{dB}(\omega)=20\log\left|\underline{H}(j\omega)\right|=20\log\left|H_O\right|+40\log x-10\log\left(\left(1-x^2\right)^2+\left(\dfrac{x}{Q}\right)^2\right)$
- La phase s'exprime : $\varphi(\omega)=\arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)=\arg\left(H_O\right)\pm\pi-\arctan\left(\dfrac{x}{Q\left(1-x^2\right)}\right)$

c. Etude asymptotique.

Comportement basse fréquence : $x \ll 1$

- La fonction de transfert peut s'approximer par : $\underline{H}(jx)=-H_O x^2$
- Le gain en décibel présente une asymptote oblique : $G_{dB}(\omega)\xrightarrow{x\to 0}20\log\left|H_O\right|+40\log x$

  La pente de l'asymptote est de +40dB/décade.
- La courbe de phase présentera une asymptote horizontale pour la valeur : $\varphi(\omega)\xrightarrow{x\to 0}\arg\left(H_O\right)+\pi$

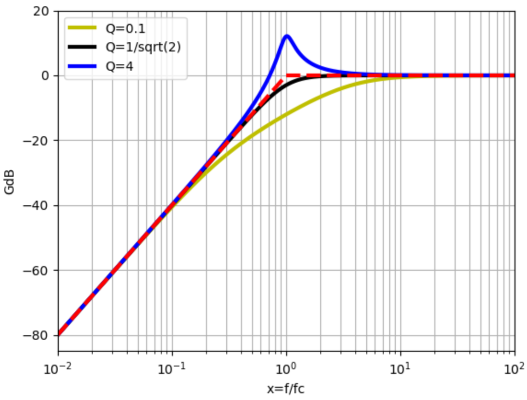
Comportement haute fréquence : $x \gg 1$

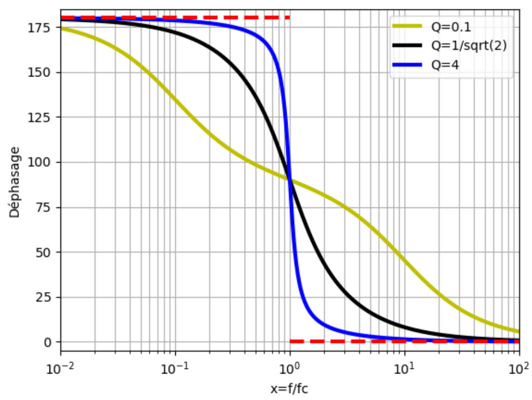
- La fonction de transfert peut s'approximer par : $\underline{H}(jx)=H_O$
- La courbe présentera une asymptote horizontale. $G_{dB}(\omega)=20\log\left|\underline{H}(j\omega)\right|\xrightarrow{x\to+\infty}20\log\left|H_O\right|$
- La courbe de phase présentera une asymptote horizontale pour la valeur : $\varphi(\omega)\xrightarrow{x\to+\infty}\arg\left(H_O\right)$

Comportement à la fréquence propre : $x=1$

- La fonction de transfert peut s'exprimer par : $\underline{H}(jx)=jQH_O$
- Le gain en décibel prend la valeur particulière : $G_{dB}(1)=20\log\left|H_O\right|+20\log Q$
- La phase prend la valeur particulière : $\varphi(1)=\arg\left(H_O\right)+\dfrac{\pi}{2}$

d. Représentation du diagramme de Bode.





En jaune : Q=0,1 ; en noir : $Q=1/\sqrt{2}$; En bleu Q=4.

e. Observations.

Les observations sont les mêmes que pour le filtre passe bas d'ordre 2 précédemment détaillées.

On retiendra que pour construire un filtre passe haut d'ordre 2 se comportant correctement pour une fréquence de coupure $\boxed{\omega_C = \omega_O}$, c'est-à-dire filtrant au mieux les basses fréquences et laissant passer les hautes fréquences, il faut s'assurer que le facteur de qualité prend une valeur proche de $\boxed{1/\sqrt{2}}$.

4.3. Filtre passe bande d'ordre 2.

a. Définition.

Un filtre est appelé passe-bande d'ordre 2, lorsque sa fonction de transfert s'écrit sous la forme canonique :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_O\left(j\dfrac{\omega}{Q\omega_O}\right)}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_O} - \dfrac{\omega^2}{\omega_O^2}}$$ où H_O est le gain statique, ω_O est la pulsation propre et Q le facteur de qualité.

On pose alors la pulsation réduite : $x = \dfrac{\omega}{\omega_O}$ et on obtient : $\underline{H}(jx) = \dfrac{H_O\left(j\dfrac{x}{Q}\right)}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2} = \dfrac{H_O}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$

b. Expression du gain en décibel et de la phase.

Pour le filtre passe bande d'ordre 2 :

- le gain en décibel s'exprime : $G_{dB}(\omega) = 20\log\left|\underline{H}(j\omega)\right| = 20\log\left|H_O\right| - 10\log\left(1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2\right)$
- La phase s'exprime : $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg(H_O) - \arctan\left(Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right)$

c. Etude asymptotique.

Comportement basse fréquence : $x \ll 1$

- La fonction de transfert peut s'approximer par : $\underline{H}(jx) = j\dfrac{H_O x}{Q}$
- Le gain en décibel présente une asymptote oblique : $G_{dB}(\omega) \xrightarrow{x\to 0} 20\log\left|H_O\right| - 20\log Q + 20\log x$
  La pente de l'asymptote est de +20dB/décade.
- La courbe de phase présentera une asymptote horizontale pour la valeur : $\varphi(\omega) \xrightarrow{x\to 0} \arg(H_O) + \dfrac{\pi}{2}$

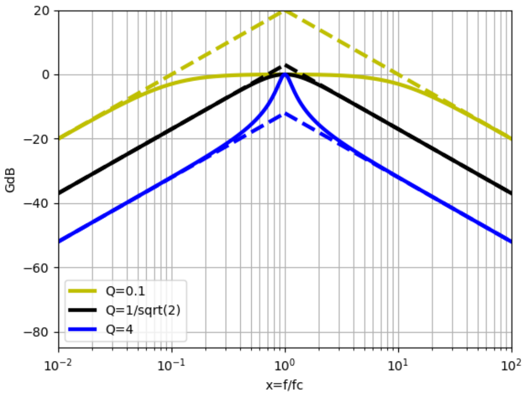
Comportement haute fréquence : $x \gg 1$

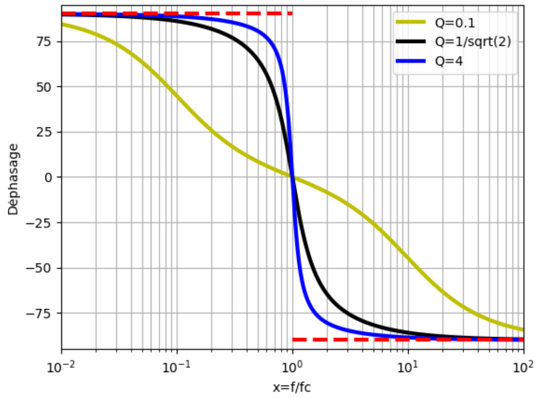
- La fonction de transfert peut s'approximer par : $\underline{H}(jx) = -j\dfrac{H_O}{Qx}$
- La courbe présentera une asymptote oblique. $G_{dB}(\omega) \xrightarrow{x\to +\infty} 20\log\left|H_O\right| - 20\log Q - 20\log x$
- La courbe de phase présentera une asymptote horizontale pour la valeur : $\varphi(\omega) \xrightarrow{x\to +\infty} \arg(H_O) - \dfrac{\pi}{2}$

Comportement à la fréquence propre : $x = 1$

- La fonction de transfert s'exprime : $\underline{H}(jx) = H_O$
- Le gain en décibel prend la valeur particulière : $G_{dB}(1) = 20\log\left|H_O\right|$
- La phase prend la valeur particulière : $\varphi(1) = \arg(H_O)$

d. Représentation du diagramme de Bode.





En jaune : Q=0,1 ; en noir : $Q=1/\sqrt{2}$; En bleu Q=4.

e. Observations.

La largeur de la bande passante du filtre s'exprime : $\boxed{\Delta x = \frac{1}{Q}}$ **ou** $\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_O}{Q}}$ **ou encore** $\boxed{\Delta f = \frac{f_O}{Q}}$

Pour assurer un filtrage de bonne qualité sur une bande passante étroite, notre préférence se portera donc sur un filtre de grand facteur de qualité.

5. Exemples de réalisation de fonction.

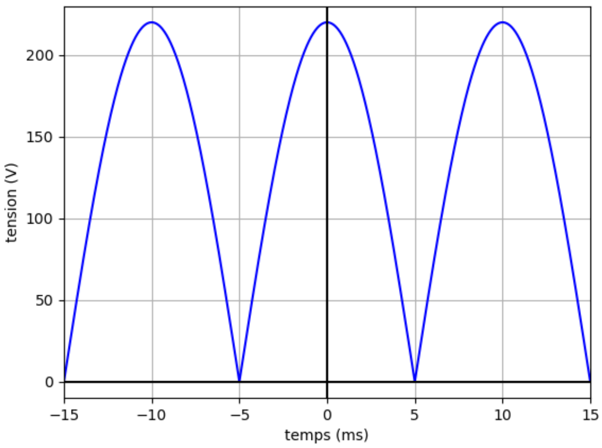
5.1. Réalisation d'une tension continue à partir du secteur.

Le courant délivré par EDF est un courant alternatif de fréquence f_O =50 Hz et d'amplitude A=220V qui peut donc s'exprimer si on le prend comme référence de phase sous la forme : $e(t) = A\cos(2\pi f_O t)$

On souhaite réaliser l'alimentation en puissance d'une alimentation stabilisée délivrant une tension de 0 à 30V sous de faible ampérage. Pour cela, on doit produire une tension quasiment continue de valeur V_{Alim} dont on va déterminer l'expression avec un taux de distorsion faible.

On utilise d'abord un circuit redresseur qui produit à partir du signal du secteur le signal redressé double alternance : $r(t) = A\left|\cos(2\pi f_O t)\right|$

1. Faire une représentation graphique de ce signal. En déduire la fréquence fondamentale de la décomposition en série de Fourier. Déterminer la valeur moyenne de ce signal.



On observe sur le graphique que la période du signal est de 10 secondes, soit une fréquence fondamentale 1/T de 100Hz. On observe donc que le signal produit par le redresseur, présente une fréquence fondamentale $2f_O$.
La valeur moyenne de ce signal s'écrit :

$$\langle r(t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos(2\pi f_O t)dt$$

$$= \frac{A}{2\pi f_O T}\left[\sin(2\pi f_O t)\right]_{-T/2}^{T/2}$$

On sait que $2f_O=1/T$ et donc $2f_O.T=1$. D'où

$$\langle r(t)\rangle_T = \frac{A}{\pi}\left[\sin\left(\pi/2\right) - \sin\left(-\pi/2\right)\right] = \frac{2A}{\pi}$$

On donne la décomposition en série de Fourier du signal redressé double alternance :

$$r(t) = \frac{2A}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{4A}{\pi(4k^2-1)}\cos(4\pi k f_O t + k\pi)\right)$$

2. Vérifier l'expression de la valeur moyenne calculée précédemment. Vérifier la cohérence de la fréquence fondamentale de cette décomposition avec le résultat précédent. Indiquer dans un tableau les valeurs de l'amplitude et de la fréquence pour le fondamental et les harmoniques de rang 2 à 6.

La valeur moyenne calculée précédemment s'identifie bien avec le terme constant de la décomposition en série de Fourier. Les fréquences dans la décomposition sont bien des multiples de $2f_O$ qui est donc bien la fréquence fondamentale.

Rang	*Fondamental*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Fréquence	*100*	*200*	*300*	*400*	*500*	*600*
Amplitude (V)	*4A/3π*	*4A/15π*	*4A/35π*	*4A/63π*	*4A/99π*	*4A/143π*

3. Expliquer qualitativement l'opération de filtrage qui doit être réalisée pour obtenir une tension fixe V_{Alim} en sortie ?

On souhaite obtenir en sortie du filtre un signal constant, et éliminer toutes les composantes sinusoïdales du signal. Il faut donc introduire un filtre passe bas qui conservera la composante constante, dont la fréquence de coupure est nettement inférieure à la fréquence fondamentale afin de placer tout le reste du spectre dans le domaine haute fréquence et de les atténuer.

On ramène l'étude à une situation plus simple en négligeant toutes les harmoniques, on ne conserve donc que la composante constante et le fondamental du signal ce qui revient à prendre : $r(t) \approx \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{3\pi}\cos(4\pi f_O t)$

On souhaite filtrer le signal pour obtenir une tension de sortie s(t) constante, avec un taux de variation de la tension qui reste inférieur à 1% qui sera donc de la forme : $s(t) \approx V_{\text{Alim}} - \delta V \cos\left(4\pi f_O t\right)$ avec $\delta V \leq 10^{-2}.V_{\text{Alim}}$

4. Indiquer la valeur G(0) du gain à fréquence nulle pour conserver toute la puissance électrique disponible dans la composante continue. Indiquer alors l'expression de V_{Alim}.

Pour conserver toute la puissance électrique disponible dans la composante continue, le gain de la fonction de transfert à fréquence nulle doit être unitaire : $\boxed{G(0)=1}$, *alors* $\boxed{V_{\text{Alim}} = \frac{2A}{\pi}}$.

5. Indiquer alors la valeur $G(2f_O)$ du gain à la fréquence fondamentale pour respecter la consigne d'un taux de distorsion inférieur à 1%.

Pour que le taux de distorsion soit inférieur à 1%, il faut que $\delta V<10^{-2}V_{Alim}$.

L'amplitude du fondamental en sortie est donnée par la relation $\delta V = G(2f_O).\frac{4A}{3\pi}$

On en conclut que $G(2f_O).\frac{4A}{3\pi} < 10^{-2}\frac{2A}{\pi}$ *d'où* $\boxed{G(2f_O) < 1{,}5.10^{-2}}$

On envisage de faire cette opération avec un filtre d'ordre 1 de fonction de transfert : $\underline{H}(jf) = \frac{H_O}{1+j\frac{f}{f_C}}$

6. Quelle valeur faut-il donnée à H_O ? Quelle valeur maximale faut-il donner à f_C ? On se contentera d'un raisonnement sur les formes asymptotiques de la fonction de transfert.

La composante continue est dans le domaine basse fréquence, et la fonction de transfert s'écrit alors $\underline{H}(0) = H_O$ *donc son gain est G(0)=*H_O*, on en déduit qu'il faut que* $\underline{\boldsymbol{H_O=1}}$.

La composante fondamentale doit être placée dans le domaine haute fréquence et la fonction de transfert est approximée par la relation $\underline{H}(j2f_O) = -j\frac{H_O f_C}{2f_O}$ *et le gain s'écrit donc* $G(2f_O) = \frac{f_C}{2f_O}$ *puisque* H_O*=1.*

On en déduit qu'il faut respecter $G(2f_O) = \frac{f_C}{2f_O} < 1{,}5.10^{-2}$ *et qu'il faut que* $\boxed{f_{C,1} < 3.10^{-2} f_O = 1{,}5 Hz}$

On envisage de réaliser cette opération avec un filtre passe bas d'ordre 2 de fonction de transfert :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_O}{1+j\frac{x}{Q}-x^2}$$

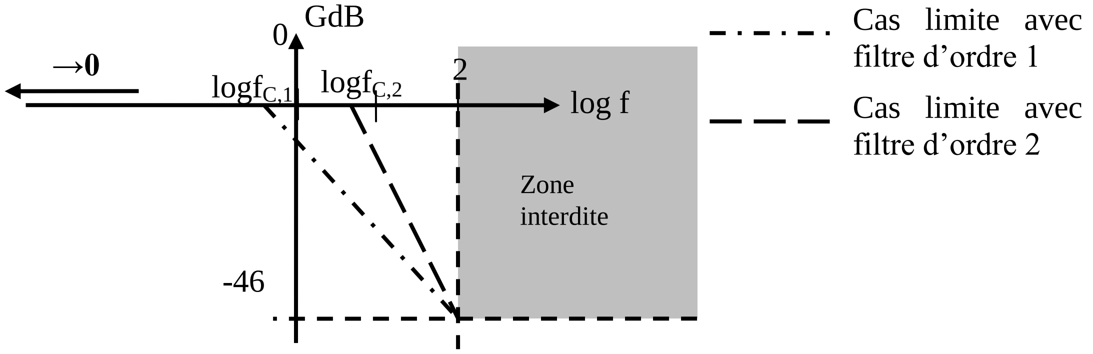
7. Quelle valeur faut-il donnée à H_O ? Quelle valeur faut-il donner à Q ? Quelle valeur maximale faut-il donner à f_C ? On se contentera d'un raisonnement sur les formes asymptotiques de la fonction de transfert.

La composante continue est dans le domaine basse fréquence, et la fonction de transfert s'écrit alors $\underline{H}(0) = H_O$ *donc son gain est G(0)=*H_O*, on en déduit qu'il faut que* $\underline{\boldsymbol{H_O=1}}$.

La composante fondamentale doit être placée dans le domaine haute fréquence et la fonction de transfert est approximée par la relation $\underline{H}(j2f_O) = -H_O\left(\frac{f_C}{2f_O}\right)^2$ *et le gain s'écrit donc* $G(2f_O) = \left(\frac{f_C}{2f_O}\right)^2$.

On en déduit qu'il faut respecter $G(2f_O) = \left(\frac{f_C}{2f_O}\right)^2 < 1{,}5.10^{-2}$ *et qu'il faut que* $\boxed{f_{C,2} < 10^{-1} f_O\sqrt{6} = 12Hz}$

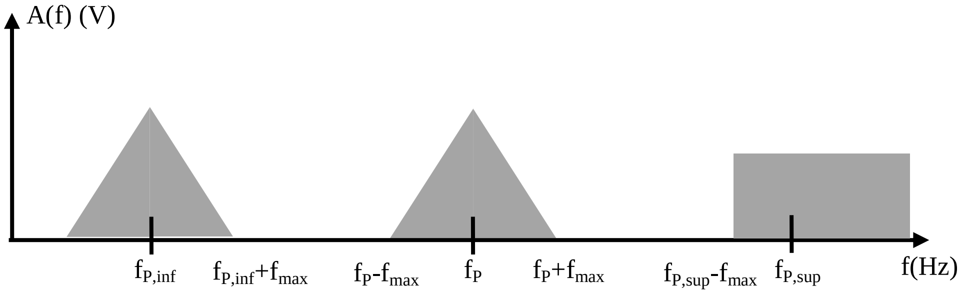
On peut résumer graphiquement les contraintes sur le filtre à réaliser et indiquer par tracé des diagrammes asymptotiques pour les deux filtres envisagés, la fréquence de coupure acceptable



5.2. Réalisation d'une sélection de bande de fréquences.

On considère le signal radio AM de la station RTL dont la fréquence de porteuse est donnée par f_P=234kHz.
Le standard de transmission pour la bande AM est d'enregistrer les émissions en limitant le spectre sonore enregistré à la bande [f_{min}=20Hz, f_{max}=4kHz]. Le principe de transmission par modulation d'amplitude (AM) produit alors un signal modulé s_m dont les fréquences sont comprises entre f_P-f_{max} et f_p+f_{max}.
Pour que les émissions des différentes stations ne soient pas toutes réceptionnées en même temps sur le poste radio, on leur assigne des fréquences de porteuse différentes. On observe dans le tableau d'assignation des fréquences que la porteuse de RMC est $f_{P,inf}$=216kHz et que la porteuse pour la radionavigation aéronautique est obligatoirement située au-dessus de 255kHz.

1. Faire une représentation sur un même graphique du spectre de l'émission de radio de la station RTL, de l'émission de la station RMC et de la bande de communication aéronautique.



On cherche à concevoir un filtre d'ordre 2 permettant d'écouter la station RTL en filtrant les émissions des autres stations.

2. Quel type de filtre doit-on employer pour faire cette opération ? Donner la fonction de transfert si on suppose ce filtre d'ordre 2.

Il faut éliminer les signaux basse fréquence de la station RMC et les signaux haute fréquence de communication aéronautique. Il faut donc utiliser un filtre passe bande.

Pour un filtre d'ordre 2 la fonction de transfert s'écrit alors $\underline{H}(j\omega)=\dfrac{H_O}{1+jQ\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}$

3. Quelle sera la fréquence propre et le facteur de qualité du filtre si on souhaite que l'ensemble du spectre du signal émis par la station RTL soit dans la bande passante du filtre.

Pour placer le spectre du signal émis par la station RTL dans la bande passante du filtre, il faut que la fréquence centrale soit fixée sur f_P et que la bande passante soit de largeur $2f_{max}$.
On peut donc proposer que $f_C=f_P$=234kHz et que $Q=f_P/2f_{max}$=29,3.

4. Quel sera alors le gain du filtre pour les sons graves et le gain du filtre pour les sons les plus aigus transmis ? Commenter cette observation.

Pour les sons graves de fréquence 20Hz, transmis à la fréquence 234,02kHz, le gain du filtre sera d'environ H_O et pour les sons les plus aigus de fréquence 4kHz, transmis à la fréquence 238kHz il sera de $H_O/\sqrt{2}$. Il y aura donc une distorsion du son réduisant les sons aigus et augmentant les sons graves.

5. Quel sera le facteur d'atténuation de la fréquence de porteuse de la station RMC ? Quelle sera le facteur d'atténuation de la fréquence de porteuse minimale pour la radionavigation aéronautique.

Pour la station RMC si on la suppose dans le domaine basse fréquence, la fonction de transfert s'approxime par $\underline{H}\left(f_{P,\inf}\right)=j\dfrac{H_O f_{P,\inf}}{Qf_P}$ *et le gain s'écrit* $G_{RMC}=\dfrac{H_O f_{P,\inf}}{Qf_P}=3,2.10^{-2}H_O$.

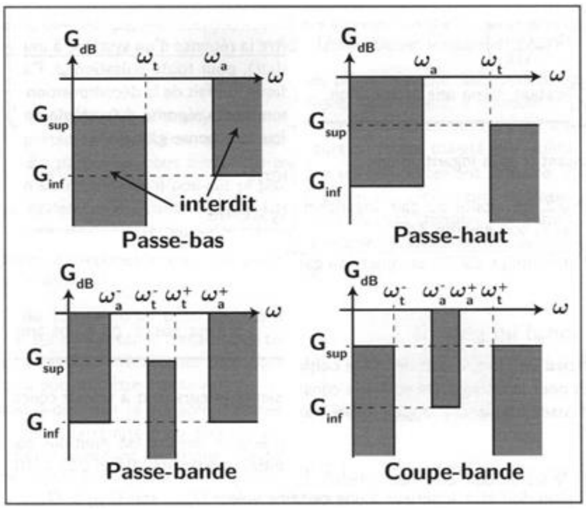
Pour la navigation aeronautique si on la suppose dans le domaine haute fréquence, la fonction de transfert s'approxime par $\underline{H}\left(f_{P,\sup}\right)=-j\dfrac{H_O f_P}{Qf_{P,\sup}}$ *et le gain s'écrit* $G_{aéronautique}=\dfrac{H_O f_P}{Qf_{P,\sup}}=3,210^{-2}H_O$.

5.3. Conception d'un filtre, représentation graphique des contraintes, gabarit.

a. <u>Démarche générale.</u>

On peut donc observer qu'à chaque situation, on doit concevoir un filtre qui réponde aux contraintes imposées par l'opération envisagée :

- Quelles sont les fréquences à conserver ? Quelles sont les fréquences à éliminer ? Quel est alors le type de filtre à utiliser ?
- Quel est le gain minimum pour les fréquences à conserver ? Quel est le gain maximum pour les fréquences à éliminer ?
- On peut réaliser un gabarit, c'est-à-dire la représentation graphique de ces contraintes sur un graphique représentant le gain en décibel en fonction de la pulsation, ou de la fréquence.



b. <u>Exemple particulier : réalisation d'un moyenneur.</u>

Un moyenneur est un filtre qui propose en sortie un signal continu égal à la moyenne temporelle du signal en entrée.

Pour un signal périodique de fréquence fondamentale f_F, on devra donc réaliser la sélection de composante suivante :

- Conserver la composante continue de fréquence nulle, éliminer toutes les composantes variables dont la composante de fréquence la plus faible c'est-à-dire le fondamental.
- On utilise donc un filtre passe bas dont on détermine la fréquence de coupure qualitativement comme nettement inférieure à f_F.
- Avec des critiques quantitatifs plus explicites, on peut fixer une valeur maximale de cette fréquence de coupure.

<u>Capacités exigibles</u>

- Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
- Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal.
- Etablir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.
- Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal a la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.
- Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associe à une fonction de transfert d'ordre 1.
- Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire a une excitation sinusoïdale, a une somme finie d'excitations sinusoïdales, a un signal périodique.
- Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.
- Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.
- Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur.