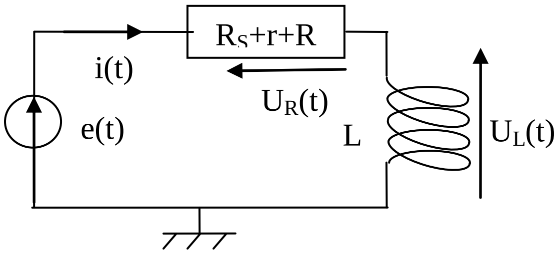
Problème 1 : Etude d'une bobine réelle.

A. Mise en œuvre dans un circuit RL.

1. Schéma du montage :



2. On étudie le circuit en régime stationnaire avec une fem nulle en entrée et la bobine remplacée par un fil. On trouve alors que la tension aux bornes de la résistance équivalente est nulle et par la loi d'Ohm on obtient $\boxed{i(t=0-)=0}$.

On en déduit par continuité de la tension aux bornes de la bobine $\boxed{i(t=0+)=0}$

3. En régime stationnaire avec une fem E, on remplace la bobine par un fil dans le schéma et on obtient par la loi d'Ohm et la loi des mailles dans le circuit : $\boxed{i_O=\dfrac{E}{r+R_S+R}}$

4. On écrit la loi des mailles $E=U_R(t)+U_L(t)$

On écrit les lois constitutives $U_R(t)=\left(r+R_S+R\right)i(t)$; $U_L(t)=L\dfrac{di}{dt}(t)$

pour obtenir l'équation différentielle $\boxed{\dfrac{di}{dt}(t)+\dfrac{1}{\tau}i(t)=\dfrac{1}{\tau}\dfrac{E}{r+R_S+R}}$ avec $\boxed{\tau=\dfrac{L}{r+R_S+R}}$

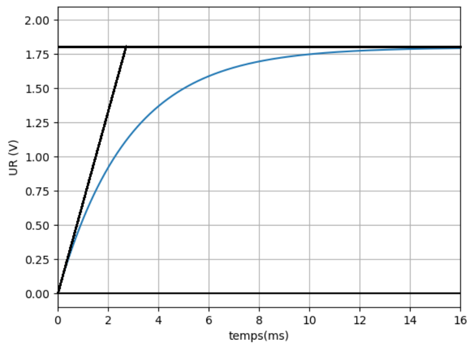
5. La solution générale de l'équation homogène est : $f(t)=A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

Une solution particulière de l'équation complète est : $f_P(t)=i_O$

La solution recherchée est donc de la forme : $f(t)=A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)+i_O$

On utilise alors la continuité de l'intensité du courant traversant une bobine pour établir l'expression suivante de l'intensité du courant : $\boxed{i(t)=i_O\left[1-\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right]}$ et $\boxed{u_R(t)=\dfrac{RE}{R+R_S+r}\left[1-\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right]}$

6. On lit sur le graphique $u_{\max}=\dfrac{RE}{R+R_S+r}\approx 1{,}8V$



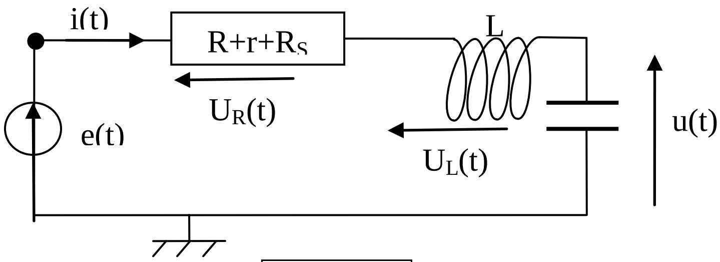
d'où $\boxed{r=R\left(\dfrac{E}{u_{\max}}-1\right)-R_S}$ A.N $\boxed{r=1{,}3.10^2\Omega}$

On lit également $\tau=\dfrac{L}{r+R_S+R}=2{,}7.ms$

D'où $\boxed{L=\tau\left(r+R_S+R\right)}$ A.N $\boxed{L=0{,}76H}$

B. Mise en œuvre dans un circuit RLC.

7. Schéma du second circuit :



8. Lors du régime stationnaire le condensateur est un interrupteur ouvert et donc $\boxed{i(t=0-)=0}$.

De plus la bobine est un fil et le conducteur ohmique présente une tension nulle. La loi des mailles amène à la conclusion $\boxed{u(t=0-)=0}$.

La continuité de la tension aux bornes d'un condensateur amène alors à $\boxed{u(t=0+)=0}$ et la continuité de l'intensité traversant une bobine amène alors à $\boxed{i(t=0+)=0}$

9. Lorsqu'on atteint le régime stationnaire, la tension aux bornes du condensateur est constante et donc l'intensité qui y circule est nulle, ce qui permet de dire que $\boxed{i(t\to+\infty)=0}$. Par la loi des mailles et applications des lois de comportement des composants on obtient alors $\boxed{u(t\to+\infty)=E}$
10. On écrit la loi des mailles $E=U_R(t)+U_L(t)+u(t)$

On écrit les lois pour les composants : $U_R(t)=\left(r+R+R_S\right)i(t)$ $U_L(t)=L\frac{di}{dt}($; $i(t)=C\frac{du}{dt}(t)$ et on aboutit à : $\boxed{\frac{d^2u}{dt^2}(t)+\frac{\omega_O}{Q}\frac{du}{dt}(t)+\omega_O^2u(t)=\omega_O^2E(t)}$ avec : $\boxed{\omega_O=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q=\frac{1}{R+r+R_S}\left(\frac{L}{C}\right)^{1/2}}$

11. **<u>On observe un régime pseudo-périodique</u>**. Le polynôme caractéristique est $r^2+\frac{\omega_O}{Q}r+\omega_O^2=0$

<u>**Il**</u>admet alors deux racines $r_\pm=-\frac{\omega_O}{2Q}\pm j\frac{\omega_O}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}=-\frac{1}{\tau_2}\pm j\omega_p$

La solution générale de l'équation homogène est alors : $S_H(t)=\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\left(A_1\cos\left(\omega_P t\right)+A_2\sin\left(\omega_P t\right)\right)$

Une solution particulière de l'équation complète est : $S_P(t)=E$

La solution recherchée est donc de la forme : $S_G(t)=E+\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\left(A_1\cos\left(\omega_P t\right)+A_2\sin\left(\omega_P t\right)\right)$

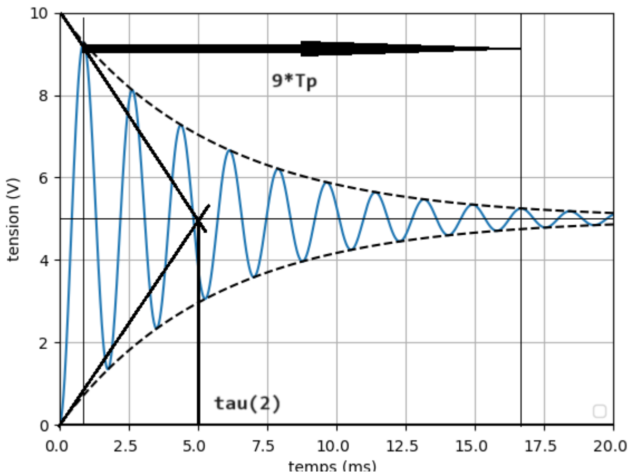
Les conditions à vérifier sont :

$$u(t=0+)=0=E+A_1 \qquad i(0)=0=C\frac{du}{dt}(0)=-\frac{1}{\tau_2}A_1+\omega_P A_2$$

On obtient alors comme expression de la tension aux bornes du condensateur :

$$\boxed{S_G(t)=E\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\left(\cos\left(\omega_P t\right)+\frac{1}{\omega_P\tau_2}\sin\left(\omega_P t\right)\right)\right)}$$

12. On mesure sur le graphique le temps caractéristique $\tau_2=5,0.10^{-3}s$ et $9.T_P=15ms$ ce qui donne une pseudo-période $T_P=1,7.10^{-3}s$ Avec $\frac{1}{\tau_2}=\frac{\omega_O}{2Q}$ et $\frac{2\pi}{T_P}=\frac{\omega_O}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$



ce qui donne $\boxed{Q=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2\pi\tau_2}{T_P}\right)^2+1}=9,4}$ et $\boxed{\omega_O=\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_P}\right)^2-\frac{1}{\tau_2^2}}=3,6.10^3 rad.s^{-1}}$

On en déduit alors $\boxed{L=\frac{1}{C\omega_O^2}=0,77H}$ et $\boxed{r=\frac{1}{CQ\omega_O}-\left(R+R_S\right)=1,4.10^2\Omega}$

C. Résonnance du circuit RLC.

13. L'intensité est prise sous la forme d'un signal sinusoïdal synchrone de la force électromotrice car le circuit est alors utilisé en régime sinusoïdal forcé. On introduit alors les signaux complexes $\boxed{\underline{e}(t)=e_O\exp\left(j\omega t\right)}$ et $\boxed{\underline{i}(t)=\underline{i}_O\exp\left(j\omega t\right)}$ tels que $\boxed{e(t)=\mathrm{Re}\left[\underline{e}(t)\right]}$ et $\boxed{i(t)=\mathrm{Re}\left[\underline{i}(t)\right]}$.

14. On définit pour un dipôle aux bornes duquel on mesure la tension $\underline{u}$(t) et qui est traversé par un courant d'intensité $\underline{i}$(t) l'impédance complexe par $\boxed{\underline{u}(t) = \underline{Z}\,\underline{i}(t)}$

Pour le circuit envisagé, l'impédance est obtenue par association en série soit $\boxed{\underline{Z} = (R_S + r + R) + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$

On obtient alors avec la tension $\underline{e}$(t) en entrée de ce circuit une amplitude complexe $\underline{i}_O = \dfrac{e_O}{(R_S + r + R) + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$

Qu'on met sous la forme $\underline{i}_O = \dfrac{\frac{e_O}{R_S + r + R}}{1 + jf\frac{2\pi L}{R_S + r + R} - \frac{1}{jf}\frac{1}{2\pi C}\frac{1}{R_S + r + R}} = \dfrac{i_O}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_O} - \frac{f_O}{f}\right)}$

On obtient par identification $\boxed{i_O = \frac{e_O}{R_S + r + R}}$; $\frac{Q}{f_O} = \frac{2\pi L}{R_S + r + R}$; $Qf_O = \frac{1}{2\pi C}\frac{1}{R_S + r + R}$

Ce qui donne $\boxed{Q = \frac{1}{R_S + r + R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$ et $\boxed{f_O = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$

15. On obtient $i_O(f) = \dfrac{i_O}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{f}{f_O} - \frac{f_O}{f}\right)^2}}$ et $u_{RO}(f) = \dfrac{Ri_O}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{f}{f_O} - \frac{f_O}{f}\right)^2}}$

16. On mesure l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance R lorsqu'on passe sur la résonance en intensité ce qui donne ici $u_{RO} = \dfrac{Re_O}{R_S + r + R} = 1{,}8V$ t on retrouve $\boxed{r = R\left(\frac{e_O}{u_{RO}} - 1\right) - R_S = 130\Omega}$

On lit pour la fréquence propre du circuit $\log(f_O) = 2{,}75$ soit $f_O = 5{,}6.10^2 Hz$ ce qui donne $\boxed{L = \frac{1}{C(2\pi f_O)^2} = 0{,}80H}$