Problème 1 : Stratégie de charge des super condensateurs.

1. L'analyse donne :
   a. La rame parcourt une distance de 400m à la vitesse de 15km/h ce qui donne une durée du trajet en autonomie de Δt=96s. Pendant cette durée les moteurs développent une puissance de P=500kW.

L'énergie totale nécessaire au trajet est alors estimée à $\boxed{E_{Tot}=P.\Delta t=4{,}8.10^7 J \text{ soit } 48MJ}$.

   b. Cette énergie est fournie par les 48 condensateurs de capacité C ce qui donne avec l'expression de l'énergie stockée dans un condensateur $E_{tot}=48C\dfrac{U^2}{2}$ où U est la tension d'alimentation du tram c'est-à-dire 750V. On obtient alors $\boxed{C=\dfrac{E_{tot}}{24U^2}=3{,}6F}$ une valeur énorme comparée aux capacités des condensateurs usuellement utilisés en TP de l'ordre du µF au maximum.
   c. Pour estimer la résistance R du circuit de charge, on exploite la donnée fournie de t_{charge}=20s pour recharger les condensateurs au passage en station. Le temps caractéristiques de charge est donné par le produit RC, et la durée totale de charge peut être estimée à 5.RC (cf la question 9 du sujet). On en déduit que $\boxed{R=\dfrac{t_{charge}}{5C}\approx 1\Omega}$ une résistance effectivement très faible.

- ***Premier procédé de charge.***

2. En dessinant le circuit et en notant i(t) l'intensité traversant le condensateur en convention récepteur :

Loi des mailles : $E=u_r+u_c$ loi d'Ohm $u_r=Ri$ Condensateur $i=C\dfrac{du_c}{dt}$

On obtient donc l'équation différentielle $\boxed{\dfrac{du_c}{dt}+\dfrac{u_c}{\tau}=\dfrac{E}{\tau}}$ avec $\boxed{\tau=RC}$

3. L'énoncé précise que le condensateur est initialement déchargé donc $\boxed{u_C(t=0^-)=0}$

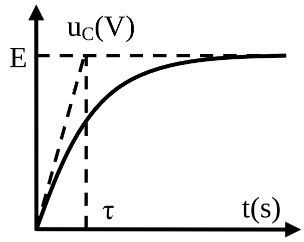
Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur on obtient $\boxed{u_C(t=0^+)=u_C(t=0^-)=0}$.

4. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit

$$S_G=S_H+S_P=A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)+E$$

La condition en t=0+ permet alors d'obtenir A

et finalement $\boxed{u_c(t)=E\left(1-\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)}$.



5. Au cours de la charge, l'énergie stockée dans le condensateur est $\boxed{E_{stockée}=\dfrac{C}{2}\left(u_c^2(t\to+\infty)-u_c^2(0)\right)=\dfrac{CE^2}{2}}$
6. Le générateur fournit la puissance $P_{Géné}(t)=E.i(t)$

L'énergie totale fournie est alors $E_{Fournie}=\displaystyle\int_{charge}P_{Géné}(t)dt=\int_{charge}E.i(t)dt=\int_{charge}E.C\frac{du_c}{dt}dt=\int_0^E ECdu_c$

On obtient finalement $\boxed{E_{Fournie}=CE^2}$.

7. Le rendement de la charge est alors $\boxed{\eta=\dfrac{E_{Stockée}}{E_{Fournie}}=\dfrac{1}{2}}$ Ce rendement ne dépend absolument pas de R et ne peut donc pas être modifié en jouant sur la valeur de cette résistance.

- ***Second procédé de charge.***

8. En reprenant le travail fait en première partie, on traduit les résultats dans la nouvelle situation.

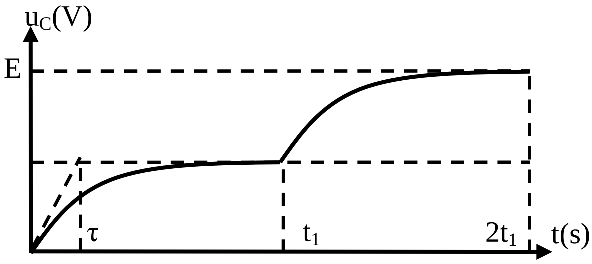
L'équation différentielle devient $\boxed{\dfrac{du_c}{dt}+\dfrac{u_c}{\tau}=\dfrac{E}{2\tau}}$ la tension lors de cette phase devient $\boxed{u_c(t)=\dfrac{E}{2}\left(1-\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)}$.

9. On cherche t_1 tel que $u_c(t_1)=\dfrac{E}{2}\left(1-\exp\left(-\dfrac{t_1}{\tau}\right)\right)=0{,}99\dfrac{E}{2}$ d'où $\exp\left(-\dfrac{t_1}{\tau}\right)=\dfrac{1}{100}$ puis $\boxed{t_1=\tau\ln(100)}$
10. On retrouve l'équation différentielle avec le générateur de fem E soit $\boxed{\dfrac{du_c}{dt}+\dfrac{u_c}{\tau}=\dfrac{E}{\tau}}$

La solution générale est toujours $S_G=S_H+S_P=A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)+E$ et la condition à respecter est

$u_c(t_1)=\dfrac{E}{2}=A\exp\left(-\dfrac{t_1}{\tau}\right)+E$ donc $A=-\dfrac{E}{2}\exp\left(\dfrac{t_1}{\tau}\right)$ et $\boxed{u_c(t)=E-\dfrac{E}{2}\exp\left(-\dfrac{t-t_1}{\tau}\right)}$

L'allure de $u_C(t)$ au cours des deux phases est alors donnée ci contre :



11. On reprend le calcul de la q6 et on l'adapte

Pour la première phase : $E_{Fournie,1} = \int_0^{E/2} \frac{E}{2} C du_c = \frac{C}{4}E^2$ pour la seconde phase $E_{Fournie,2} = \int_{E/2}^{E} ECdu_c = \frac{C}{2}E^2$

On obtient finalement le l'énergie totale fournie est $E_{Fournie} = E_{Fournie,1} + E_{Fournie,2} = \frac{3C}{4}E^2$.

12. Le rendement par cette méthode est donc $\boxed{\eta = \frac{2}{3}}$. Ce second procédé amène à un rendement de la charge amélioré mais demandera plus de matériel (deux générateurs) et un pilotage de l'interrupteur précis.

- ***Généralisation à une charge en N étapes.***

13. Lors de l'étape k de la charge, en adaptant les résultats précédents :
    a. L'équation différentielle vérifiée devient : $\boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{kE}{N\tau}}$

l'expression de $u_C(t)$ sur l'étape k devient $\boxed{u_c(t) = \frac{E}{N}\left[k - \exp\left(-\frac{t-(k-1)t_1}{\tau}\right)\right]}$

    b. A l'étape k, le générateur de fem kE/N fournit une énergie $\boxed{E_{Fournie,k} = \int_{(k-1)E/N}^{kE/N} \frac{kE}{N} C du_c = C\frac{k}{N^2}E^2}$

    c. Alors $\boxed{E_{Fournie} = \sum_{k=1}^{N} E_{Fournie,k} = \frac{C}{N}E^2 \sum_{k=1}^{N} k = \frac{C}{N}E^2\left(\frac{N+1}{2}\right)}$

    d. Le rendement pour une charge en N étapes s'écrit alors bien $\boxed{\eta_N = \frac{N}{N+1}}$

Problème 2 : Etude d'un circuit RLC.

1. On ferme l'interrupteur et on introduit en convention récepteur i_R, i_C et i_L.
2. Aucun courant ne circule avant fermeture et le condensateur est déchargé.

On en déduit par continuité de la tension aux bornes du condensateur que $\boxed{u(t=0^+) = u(t=0^-) = 0}$

On sait de plus que l'intensité dans la bobine est continue et donc que $i_L(t=0^+) = i_L(t=0^-) = 0$

La loi d'ohm permet d'écrire que $i_R(t=0^+) = \frac{u}{R}(t=0^+) = 0$

On obtient par la loi des nœuds que $i_C(t=0^+) = i(t=0^+)$; dans la branche du générateur $E - ri(t=0^+) = 0$

d'où $i_C(t=0^+) = \frac{E}{r}$ et par loi de comportement du condensateur $\boxed{\frac{du}{dt}(t=0^+) = \frac{i_C}{C}(t=0^+) = \frac{E}{rC}}$

3. On écrit la loi des nœuds : $i = i_R + i_C + i_L$

Et pour chaque branche $u = E - ri$; $u = Ri_R$; $i_C = C\frac{du}{dt}$ et $u = L\frac{di_L}{dt}$

On obtient alors naturellement l'équation $\frac{E-u}{r} = \frac{u}{R} + C\frac{du}{dt} + i_L$

Pour éliminer i_L il faut dériver cette équation par rapport au temps :

$0 = \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)\frac{du}{dt} + C\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{u}{L}$ qu'on remet sous la forme $\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)\frac{1}{C}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$

On l'écrit sous la forme canonique $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_O}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_O^2 u = 0$

par identification on obtient $\omega_O^2 = \frac{1}{LC}$ et $\frac{\omega_O}{Q} = \frac{r+R}{RrC}$ ce qui donne **<u>la pulsation propre</u>** $\boxed{\omega_O = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et **<u>le facteur de qualité</u>** $\boxed{Q = \frac{Rr}{r+R}\sqrt{\frac{C}{L}}}$

4. L'expression et le graphique permettent de conclure à l'observation d'un régime transitoire pseudopériodique.

Pour obtenir Ω et τ, on cherche les racines du polynome caractéristique $r^2 + \frac{\omega_O}{Q} r + \omega_O^2$ pour lequel on sait que le discriminant $\Delta = 4\omega_O^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right) < 0$ on en déduit les racines $r_\pm = -\frac{\omega_O}{2Q} \pm j\omega_O\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$

On en déduit $\boxed{\Omega = \omega_O\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ et $\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_O}}$

5. Le lien entre la pseudo-période T et la pseudo-pulsation Ω est $\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{T}}$

6. La définition donne $\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\Omega t)}{e^{-\frac{t+nT}{\tau}}\sin(\Omega(t+nT))}\right)$.

Avec $\Omega T = 2\pi$, $\sin(\Omega(t+nT)) = \sin(\Omega t + 2n\pi) = \sin(\Omega t)$ alors $\boxed{\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{e^{-\frac{t+nT}{\tau}}}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(e^{\frac{nT}{\tau}}\right) = \frac{T}{\tau}}$

On sait que $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_O\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ et $\tau = \frac{2Q}{\omega_O}$ on en déduit $\boxed{\delta = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}}$

7. On lit pour le premier pic une tension u_1=1,7V et pour le second une tension u_2=0,6V.

On en déduit que $\delta = \ln\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = 1{,}04$, on en déduit $\boxed{Q = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 + 1} = 3{,}06}$

8. Pour la valeur de Q obtenue $\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = 0{,}987$ il y a donc un écart de 1,3% entre Ω et ω_O et l'approximation proposée semble valable. On exploite alors $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_O \approx \Omega = \frac{2\pi}{T}$

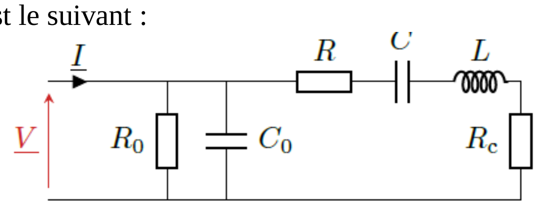
On obtient alors $\boxed{L = \frac{T^2}{4\pi^2 C}}$ la lecture graphique donne 3ms↔4,4cm et 2,5cm↔3T et $\boxed{T = 5{,}7.10^{-1} ms}$

L'application numérique donne $\boxed{L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = 8{,}2 mH}$

9. On détermine finalement $\boxed{r = \frac{RQ}{R\sqrt{\frac{C}{L}} - Q} = 3{,}8.10^2 \Omega}$

Problème 3 : Etude de la résonance en courant d'un moteur.

1. Le dessin demandé est le suivant :



2. L'admittance de l'association en série des 4 composants concernés donne :

$\underline{Y}_S = \frac{1}{\underline{Z}_S} = \frac{1}{R + R_C + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$ qu'on peut écrire sous forme $\boxed{\underline{Y}_S = \frac{1}{R + R_C + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}}$

3. Le module s'exprime $\boxed{Y_S = \dfrac{1}{\sqrt{(R+R_C)^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}}$

Ce module passe par un maximum lorsque $f(\omega) = (R+R_C)^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2$ passe par un minimum, c'est-à-dire lorsque $\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2$ passe par son minimum nul.

On en déduit que Y_S passe par un maximum pour la pulsation $\boxed{\omega_S = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ alors $\boxed{Y_S(\omega_S) = \dfrac{1}{R+R_C}}$

4. Par la définition de l'impédance et de l'admittance, $\underline{I} = \underline{Y}\underline{V}$ ce qui implique pour les amplitudes réelles de l'intensité et de la tension $I_O(\omega) = Y(\omega)V_O(\omega)$.

L'amplitude de l'intensité sera donc maximale lorsque le module de l'admittance est maximale si on suppose que l'amplitude de la tension appliquée reste constante.

5. La courbe et le zoom sur la zone entourant la valeur x=1 montre que le maximum du module Y est proche de x=1, ce qui permet de faire l'approximation $\boxed{\omega_r \approx \omega_S}$

On en déduit $\omega_r = 2\pi f_r \approx \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ puis $\boxed{f_r \approx \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 3,6.10^4\,Hz}$

6. Pour la partie électronique $\boxed{\underline{Y}_O = \underline{Y}_{R_O} + \underline{Y}_{C_O} = \dfrac{1}{R_O} + jC_O\omega}$ Son module s'exprime $\boxed{Y_O = \sqrt{\dfrac{1}{R_O^2} + C_O^2\omega^2}}$

A.N pour $\omega=\omega_S$ $\boxed{Y_S(\omega_S) = \dfrac{1}{R+R_C} = 1,0.10^{-2}\,\Omega^{-1}}$ (d'après q3) et $\boxed{Y_O(\omega_S) = \sqrt{\dfrac{1}{R_O^2} + \dfrac{C_O^2}{LC}} = 1,8.10^{-3}\,\Omega^{-1}}$

On constate que Y_O est d'un ordre de grandeur plus faible que Y_S ce qui permet de justifier l'approximation $\underline{Y} = \underline{Y}_S + \underline{Y}_O \approx \underline{Y}_S$ en conséquence de quoi il est logique que la pulsation de résonance pour l'ensemble du circuit soit proche de celle obtenu pour l'impédance motionnelle $\omega_r \approx \omega_S$.

7. Si R_C augmente de 10%, Y_S diminue faiblement et on peut toujours envisager que $Y_O \ll Y_S$. La pulsation de résonnance reste donc proche de $\omega_r \approx \omega_S$. La fréquence d'alimentation du moteur n'a alors pas besoin d'être adapté en fonction de la charge mécanique du moteur ce qui simplifie l'exploitation de ce type de système.

Problème 4 : Etude d'une cellule de filtrage.

- ***Etude du filtre.***

1. A BF, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et une bobine est équivalente à un fil. En redessinant le circuit, on obtient alors s(t)=e(t). Le circuit laisse passer les BF.

A HF, un condensateur est équivalent à un fil et une bobine est équivalente à un interrupteur ouvert. En redessinant le circuit, on obtient alors s(t)=0. Le circuit bloque les HF.

On en conclut que le circuit réalisé est un passe bas.

2. Par le diviseur de tension : $\underline{s}(t) = \dfrac{\underline{Z}_{//}}{\underline{Z}_{//} + \underline{Z}_L}\underline{e}(t) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_{//}}}\underline{e}(t)$ où $\underline{Z}_L = jL\omega$ et $\dfrac{1}{\underline{Z}_{//}} = jC\omega + \dfrac{1}{R}$

On en déduit $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + jL\omega\left(\dfrac{1}{R} + jC\omega\right)} = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{L}{R}\omega - LC\omega^2}$ de la forme $\underline{H}(jx) = \dfrac{H_O}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$

Par identification : $H_O = 1$; $\dfrac{1}{\omega_O^2} = LC$; $\dfrac{1}{Q\omega_O} = \dfrac{L}{R}$ ce qui donne $\boxed{H_O = 1}$; $\boxed{\omega_O = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$; $\boxed{Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$

3. On exprime le gain $G(x) = |\underline{H}(jx)| = \dfrac{H_O}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2}}$

Ce gain présentera une résonance si il passe par un maximum pour une pulsation réduite non nulle. On étudie donc $f(x)=\left(1-x^2\right)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2$, lorsque f(x) présente un minimum, alors il y a résonnance du filtre.

On exprime la dérivée : $f'(x)=2(-2x)\left(1-x^2\right)+\frac{2x}{Q^2}$ et on cherche ses annulations pour obtenir l'équation suivante $4x\left(x^2-1+\frac{1}{2Q^2}\right)=0$ elle s'annule pour une pulsation réduite non nulle si $x^2=1-\frac{1}{2Q^2}$ présente une solution réelle.

Il faut donc que : $1-\frac{1}{2Q^2}>0$ ce qui amène la condition $\boxed{Q>\frac{1}{\sqrt{2}}}$ et alors $\boxed{x_R=\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$

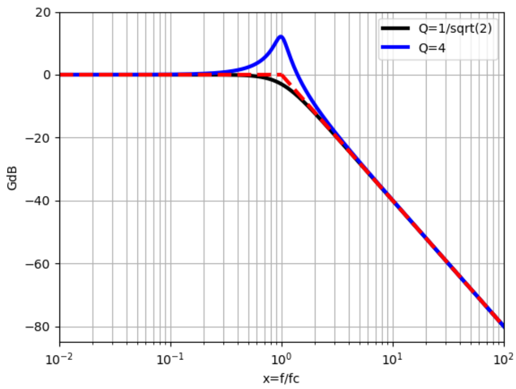
$f'(x)<0$ pour $x<x_R$ et $f'(x)>0$ pour $x>x_R$ permet bien se s'assurer qu'on observera un maximum pour le gain.

4. A BF : $\underline{H}_{BF}(jx)=H_O$ alors $G_{BF}(x)=H_O$; $G_{dB,BF}(x)=20\log(H_O)$; $\varphi_{BF}(x)=0$
5. A HF : $\underline{H}_{HF}(jx)=-\frac{H_O}{x^2}$ alors $G_{HF}(x)=\frac{H_O}{x^2}$; $G_{dB,HF}(x)=20\log(H_O)-40\log x$; $\varphi_{HF}(x)=-\pi$
6. En x=1 : $\underline{H}(j)=-jQH_O$ alors $G(1)=QH_O$; $G_{dB}(1)=20\log(H_O)+20\log Q$; $\varphi(1)=-\frac{\pi}{2}$
7. La fréquence de coupure est la fréquence pour laquelle le gain en décibel prend la valeur maximale du gain en décibel -3dB, ce qui revient au gain en amplitude maximal divisé par $\sqrt{2}$

Lorsque $Q\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ il n'y a pas de résonance et le gain maximum est H_O, la pulsation de coupure vérifie alors $G(x_C)=\frac{H_O}{\sqrt{2}}$. Elle s'identifie avec la fréquence propre du filtre si $x_C=1$ et que $G(x_C)=\frac{H_O}{\sqrt{2}}=G(1)=QH_O$.

On en déduit que **la fréquence de coupure s'identifie avec la fréquence propre si** $\boxed{Q=\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

8. Le graph demandé est le suivant.



➢ ***Etude du signal d'entrée.***

9. La valeur moyenne d'un signal périodique de période T est donnée par $\langle e(t)\rangle_T=\frac{1}{T}\int_{t_O}^{t_O+T}e(t)dt$.

Pour le signal e(t) donné : $\boxed{\langle e(t)\rangle_T=\frac{1}{T}\left(\int_0^{\alpha T}V_O dt+\int_{\alpha T}^{T}0dt\right)=\alpha V_O}$

10. Le terme <u>**ω_F est appelé pulsation du fondamental**</u>. On sait que $\boxed{\omega_F=\frac{2\pi}{T}}$
11. Dans la série de Fourier, la composante constante est d'amplitude $\boxed{\alpha V_O}$, on retrouve comme attendu la valeur moyenne du signal étudié.
12. L'amplitude du fondamental $\boxed{\frac{2V_O}{\pi}\left|\sin(\pi\alpha)\right|}$ celle de l'harmonique de rang 2 $\boxed{\frac{V_O}{\pi}\left|\sin(2\pi\alpha)\right|}$

➢ ***Etude du signal de sortie.***

13. Le filtre étudié précédemment est un passe bas, il permettra donc de conserver la composante constante et d'éliminer toutes les composantes sinusoïdales à la condition de placer les fréquences correspondantes dans le domaine HF. Il faudra donc fixer qualitativement $\boxed{f_C<f_F}$.

14. Le filtre est un circuit électrique **linéaire**, si on place en entrée un signal constitué de deux composantes de fréquence nulle et f_F, le théorème de superposition permet d'affirmer que le signal en sortie aura la même forme et s'écrira bien $s(t) \approx s_O + s_1 \cos(\omega_F t + \varphi_S)$.
15. Pour la composante constante $\boxed{s_O = G(0)e_O = H_O \alpha V_O}$
16. La fréquence fondamentale f_F du signal est dans le domaine HF, l'expression approchée du gain dans ce domaine est $G_{HF}(x) = \dfrac{H_O}{x^2}$. On en déduit $\boxed{s_1 = G_{HF}(f_F)e_1 = H_O \left(\dfrac{f_O}{f_F}\right)^2 \dfrac{2V_O}{\pi}\left|\sin(\pi\alpha)\right|}$
17. $\boxed{f_O = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1{,}1.10^2\,Hz}$ on observe bien que $f_O \ll f_F$ et donc que f_F sera dans le domaine HF.

$\boxed{Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}} = 0{,}707}$ qui est donc bien égale à la valeur idéale $\boxed{Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

18. $\boxed{s_O = \alpha V_O = 5{,}0V}$ qui est bien la valeur voulue pour alimenter les éléments d'électronique.
19. $\boxed{\dfrac{s_1}{s_O} = \dfrac{2H_O}{\alpha\pi}\left(\dfrac{f_O}{f_F}\right)^2 \left|\sin(\pi\alpha)\right| = 8{,}4.10^{-4}}$ ce taux d'ondulation estimé avec le seul fondamental est très faible. La tension fournie en sortie sera très proche d'une valeur constante égale à 5V. On peut supposer que ce résultat est conservé lorsqu'on considère toutes les composantes de la série de Fourier associé à e(t).