

**Problème 1 : Stratégie de charge des super condensateurs.**

Un “supercondensateur” est un condensateur de technique particulière, qui permet d’obtenir une capacité élevée pour un encombrement réduit, et donc une densité de puissance et une densité d’énergie intermédiaires entre les batteries et les condensateurs électrolytiques classiques. Ils sont utilisés dans des domaines variés, dont la propulsion de bateaux, de bus ou de tramway. Leur faible résistance interne permet des courants élevés et donc des charges rapides et des puissances de sortie importantes.

Nous étudions ici un exemple d’application des supercondensateurs, et en particulier nous voyons ce qui contraint leur dimensionnement (quelle capacité, quelle résistance interne ?).

**Document :** En 2009, la RATP et Alstom ont expérimenté en service commercial un tramway Citadis équipé de supercondensateurs sur la ligne T3 du réseau francilien. La rame a été équipée de 48 modules de supercondensateurs (15 kg pièce) pour le stockage de l’énergie à bord. L’ensemble est équivalent à 48 supercondensateurs montés en parallèle sous une tension de 750 V. Ceci permet aux trams de circuler en autonomie sur les sections dépourvues de ligne aérienne de contact. En autonomie la rame peut franchir 400 m, soit la distance entre deux stations sur la ligne T3, avec une vitesse moyenne d’environ 15 km/h. Les moteurs développent une puissance moyenne continue de 500 kW, et sont alimentés sous 750 V. Présentant une résistance interne très faible, les supercondensateurs autorisent le passage d’intensités très importantes pendant les 20 secondes que dure un rechargement en station, et sont donc en cela plus adaptés que les batteries conventionnelles.

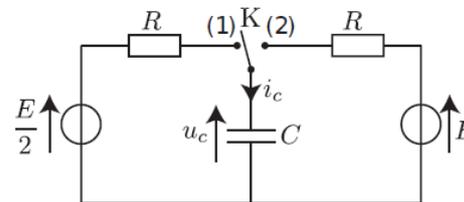
<https://www.ville-rail-transport.com/ferroviaire/alstom-et-la-ratp-testent-les-supercondensateurs-2/>

1. A l’aide du document proposé, des approximations nécessaires et de formules du cours (dont certaines sont redémontrées dans la suite du sujet), déterminer et évaluer numériquement les caractéristiques suivantes :
  - a.  $E_{Tot}$  l’énergie totale nécessaire au trajet entre deux stations
  - b.  $C$  la capacité d’un des 48 supercondensateurs installés dans la rame de tramway, commenter la valeur obtenue.
  - c.  $R$  la résistance du circuit de charge.

Lorsqu’un condensateur est utilisé comme une batterie, la question de sa recharge se pose. L’énergie est prélevée sur le réseau électrique, et on souhaiterait que 100% de cette énergie soit transférée au condensateur.

Nous allons montrer que ceci dépend de la stratégie de charge retenue. On appelle “rendement de la charge du condensateur” le rapport entre l’énergie stockée par le condensateur à l’issue de la charge et de l’énergie fournie par le générateur au cours de

cette charge : 
$$\eta = \frac{E_{Stockée}}{E_{Fournie}}$$



➤ **Premier procédé de charge.**

L’interrupteur K est d’abord dans la position intermédiaire où il n’établit aucun contact.

Le condensateur étant initialement déchargé, on bascule l’interrupteur K dans la position (2) à  $t=0$ .

2. Etablir l’équation différentielle vérifiée par la tension  $u_C(t)$ , la mettre sous forme canonique et préciser l’expression du temps caractéristique  $\tau$  introduit.
3. Préciser la valeur de  $u_C(t=0^-)$  et en déduire la valeur de  $u_C(t=0^+)$ .
4. Déterminer alors l’expression de  $u_C(t)$  et en faire une représentation graphique.
5. Donner en fonction de  $C$  et  $E$  l’expression de  $E_{Stockée}$  l’énergie stockée par le condensateur à la fin de la charge.
6. Déterminer en fonction de  $C$  et  $E$  l’expression de  $E_{Fournie}$  l’énergie fournie par le générateur.
7. Déterminer le rendement de la charge avec la méthode envisagée. Peut-il être optimisé en changeant la résistance  $R$  ?

➤ **Second procédé de charge.**

On réalise maintenant une charge en deux temps. Le condensateur est initialement déchargé. L’interrupteur K est d’abord dans la position intermédiaire où il n’établit aucun contact. Puis il est fermé en position (1) à  $t = 0$ . Lorsque le régime transitoire qui s’ensuit est achevé, l’interrupteur est basculé en position (2).

8. Déterminer l’équation différentielle vérifiée par  $u_C(t)$  puis l’expression de  $u_C(t)$  lors de la première phase de la charge.
9. Déterminer en fonction de  $R$  et  $C$  l’expression de l’instant  $t_1$  pour lequel la tension  $u_C(t_1)$  atteint 99% de sa valeur finale au cours de cette première étape.

Dans la suite, on considèrera que la charge est totalement achevée à l'instant  $t_1$  (on fait donc l'approximation  $u_C(t_1) \approx E/2$ ), et qu'à ce même instant, on bascule l'interrupteur en position (2) afin de débiter la phase 2 de la charge.

10. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $u_C(t)$  puis l'expression de  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur au cours de la deuxième phase de charge. Tracer l'allure de  $u_C(t)$  au cours de l'ensemble des deux phases de charge.
11. Déterminer l'énergie électrique fournie par les deux générateurs avec ce second procédé (on supposera pour simplifier les calculs que  $e^{-5} \approx 0$ ).
12. En déduire le rendement pour cette nouvelle façon de procéder. Conclure sur les avantages et désavantages de ce second procédé par rapport au premier.

➤ **Généralisation à une charge en N étapes.**

La charge fractionnée en deux étapes permet un meilleur rendement. Nous allons chercher à montrer que ce rendement est croissant avec le nombre d'étapes qu'on peut réaliser.

On note  $t_0=0$  l'instant initial où le condensateur est déchargé. La première étape a lieu de  $t_0$  à  $t_1=5\tau$ , par un générateur de tension  $E/N$ , à travers une résistance  $R$ .

De manière générale, l'étape numéro  $k$  de la charge ( $k=1$  à  $N$ ) a lieu de  $t_{k-1}$  à  $t_k$ , par un générateur de tension  $kE/N$ , à travers une résistance  $R$ . On donne aussi  $t_k = k \times 5\tau$ .

Au début de l'étape  $k$ ,  $u_C(t_{k-1}) = (k-1) \times E/N$ , et à la fin de l'étape  $k$ ,  $u_C(t_k) = k \times E/N$ .

13. Lors de l'étape  $k$  de la charge, déterminer (notamment en fonction de  $k$  et de  $N$ ) :

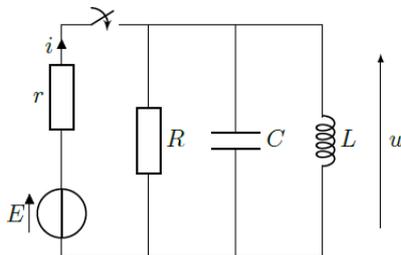
- a. L'équation différentielle vérifiée par  $u_C(t)$  puis l'expression de  $u_C(t)$ .
- b. L'expression de l'énergie fournie par le générateur (on utilisera encore  $e^{-5} \approx 0$ ).

Puis en déduire :

- c. L'expression de l'énergie fournie par le générateur lors de l'ensemble de la charge.

- d. Que le rendement pour une charge en  $N$  étapes s'écrit  $\eta_N = \frac{N}{N+1}$

**Problème 2 : Etude d'un circuit RLC.**



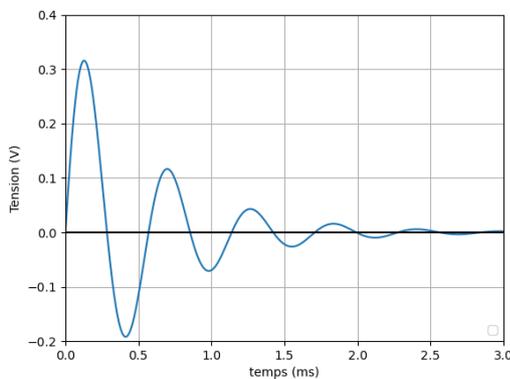
On étudie le circuit RLC parallèle ci-contre alimenté par un générateur de tension de fem  $E=5,00V$  et de résistance interne  $r$ . On donne  $R=1,00k\Omega$  et  $C=1,0\mu F$ . **Pour  $t < 0$ , aucun courant ne circule dans le circuit et le condensateur est déchargé.**

On ferme l'interrupteur à l'instant  $t=0$ .

1. Représenter le circuit pour  $t > 0$ , et introduire les grandeurs électriques nécessaires à son étude.
2. Justifier proprement que les conditions initiales à  $t=0^+$  s'écrivent :  $u(t=0^+) = 0$  et  $\frac{du}{dt}(t=0^+) = \frac{E}{rC}$ .

3. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u$ , l'écrire sous la forme canonique

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \text{ en nommant et exprimant les paramètres } \omega_0 \text{ et } Q \text{ en fonction de } L, C, r \text{ et } R$$



La résolution de cette équation permet de montrer que cette tension s'exprime  $u(t) = \frac{E}{rC\Omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\Omega t)$

A l'aide d'un oscilloscope, on visualise la tension  $u(t)$  lors de la fermeture de l'interrupteur, on obtient alors le relevé temporel suivant.

4. Indiquer le type de régime transitoire est observé, déterminer les expressions de  $\Omega$  et  $\tau$  en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .

On définit le décroissement logarithmique par l'expression suivante où  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\delta = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{u(t)}{u(t+nT)} \right)$

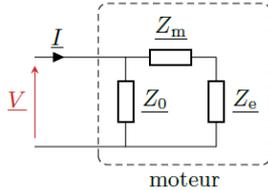
5. Rappeler le lien entre la pseudo-période  $T$  et la pseudo-pulsation  $\Omega$ .

6. Etablir l'expression du décroissement logarithmique en fonction de  $\tau$  et  $T$ , puis montrer qu'il s'exprime  $\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$ .

7. Faire la lecture graphique de  $\delta$  et évaluer  $Q$ .
8. Montrer que pour la valeur de  $Q$  obtenue, on peut écrire  $\Omega \approx \omega_0$ . Déterminer l'expression de  $L$  en fonction de  $C$  et  $T$ . Lire  $T$  sur le graphique et en déduire la valeur numérique de  $L$ .
9. Déterminer alors l'expression de  $r$  en fonction de  $R$ ,  $C$ ,  $L$  et  $Q$ . Faire l'application numérique.

**Problème 3 : Etude de la résonance en courant d'un moteur.**

Un moteur à ultrasons est alimenté par une tension sinusoïdale d'amplitude complexe  $\underline{V}$ , on note  $\underline{I}$  l'amplitude complexe de l'intensité du courant passant dans le moteur. Pour que le rendement du moteur soit optimal, il doit être alimenté à une fréquence égale à sa fréquence de résonance en courant.



Le moteur est équivalent au schéma ci-contre.  $Z_0$  représente l'impédance complexe intrinsèque du moteur. Les phénomènes électromécaniques au sein du moteur sont pris en compte, sur ce schéma, par une impédance motionnelle  $Z_m$  et par une impédance de charge mécanique  $Z_e$ .

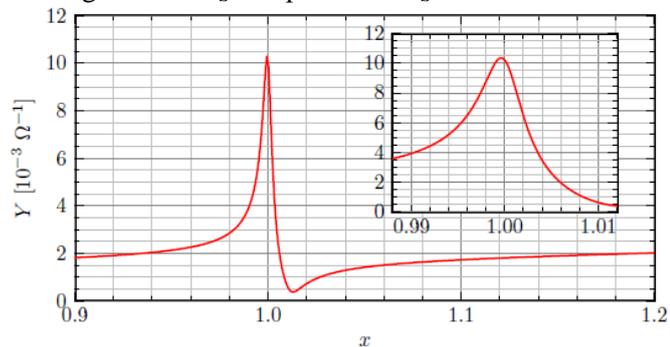
Le dipôle d'impédance  $Z_0$  est modélisé par un conducteur ohmique de résistance  $R_0=18 \text{ k}\Omega$  en parallèle avec un condensateur de capacité  $C_0=8\text{nF}$ . L'impédance motionnelle  $Z_m$  est modélisée par l'association en série d'un conducteur ohmique de résistance  $R = 50\Omega$ , d'une bobine d'inductance propre  $L=0,1\text{H}$  et d'un condensateur de capacité  $C=0,2\text{nF}$ . Enfin, l'impédance de charge  $Z_e$  correspond à une résistance  $R_C$  dans un premier temps prise égale à  $50\Omega$ .

1. Dessiner le schéma équivalent du moteur en remplaçant les impédances  $Z_0$ ,  $Z_m$  et  $Z_e$  par les résistances, bobines et condensateurs qui leur correspondent.

On étudie dans un premier temps uniquement l'association en série de  $Z_m$  et de  $Z_e$ .

2. Exprimer l'admittance  $\underline{Y}_S$  de cette association en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $R_C$  et  $(j\omega)$ . (On rappelle que l'admittance d'un dipôle est l'inverse de son impédance).
3. Déterminer alors le module  $Y_S$  de cette admittance et montrer qu'il passe par un maximum pour une pulsation  $\omega_s$  à déterminer. Exprimer également  $Y_S$  à la pulsation  $\omega_s$ .

On note  $\underline{Y}$  l'admittance équivalente à la totalité du moteur, et  $Y$  le module de cette admittance. La figure ci-dessous représente l'évolution de  $Y$  en fonction de  $x$  la pulsation réduite définie par  $x = \frac{\omega}{\omega_s}$ .

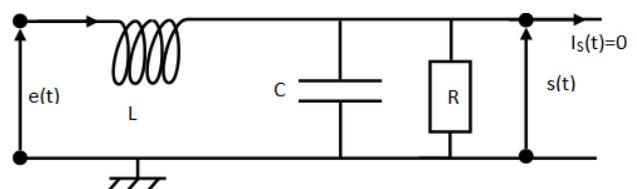


Dans ce graphique, l'insert propose un zoom sur la courbe principale au voisinage de  $x=1$ .

4. Justifier que la résonance en intensité pour le moteur correspond au maximum de la courbe de l'admittance.
5. D'après la courbe, quelle approximation peut-on faire pour la pulsation de résonance  $\omega_r$  du moteur ? En déduire l'expression de la fréquence de résonance  $f_r$  et faire l'application numérique.
6. Exprimer l'admittance intrinsèque du moteur  $\underline{Y}_0$  puis son module  $Y_0$ . Evaluer numériquement  $Y_0$  et  $Y_S$  à la pulsation de résonance. Commenter alors l'écart entre  $\omega_s$  et  $\omega_r$ .
7. Une modification de la charge mécanique du moteur provoque une variation de la résistance de charge  $R_C$  de l'ordre d'une dizaine d'ohms. Cette variation a-t-elle un effet significatif sur la fréquence de résonance en courant ? En quoi est-ce un avantage pour le fonctionnement du moteur ?

**Problème 4 : Etude d'une cellule de filtrage.**

De nombreux circuits électroniques sont alimentés avec une tension continue de 5V. Une «alimentation à découpage» transforme, en plusieurs étapes, la tension alternative sinusoïdale du réseau électrique en une tension continue. La dernière étape consiste à filtrer une tension rectangulaire par le filtre passif dont le circuit est donné ci-dessous.



➤ **Etude du filtre.**

- Rappeler à quel dipôle un condensateur est équivalent à basse fréquence et à quel dipôle une bobine est équivalente à basse fréquence. En déduire  $s(t)$  à basse fréquence. Faire de même à haute fréquence et en déduire la nature du filtre étudié ici.
- Montrer que la fonction de transfert du circuit peut se mettre sous la forme canonique

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} \quad \text{où } x = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ en précisant les expressions de } H_0, \omega_0 \text{ et } Q \text{ en fonction de } R, L \text{ et } C.$$

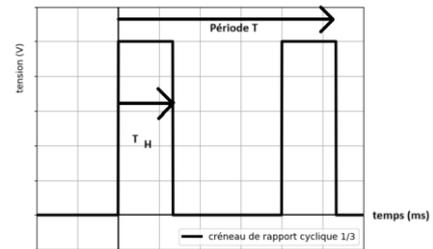
- Exprimer le gain  $G(x) = |\underline{H}(jx)|$  et montrer qu'on peut observer un phénomène de résonance en indiquant la condition vérifiée par  $Q$  et l'expression de  $x_R$  la pulsation réduite de résonance.
- Etablir l'expression approchée en basse fréquence de  $\underline{H}(jx)$  la fonction de transfert et en déduire les expressions approchées du gain  $G(x)$ , du gain en décibel  $G_{dB}(x)$  et de la phase  $\varphi(x)$ .
- Etablir l'expression approchée en haute fréquence de  $\underline{H}(jx)$  la fonction de transfert et en déduire les expressions approchées du gain  $G(x)$ , du gain en décibel  $G_{dB}(x)$  et de la phase  $\varphi(x)$ .
- Etablir l'expression de  $\underline{H}(j)$  la fonction de transfert à la pulsation propre et en déduire les expressions approchées du gain  $G(1)$ , du gain en décibel  $G_{dB}(1)$  et de la phase  $\varphi(1)$ .
- Rappeler la définition de la fréquence de coupure (à -3dB) et établir la valeur du facteur de qualité permettant de confondre cette fréquence de coupure avec la fréquence propre du filtre.
- Représenter le diagramme de Bode asymptotique (en amplitude uniquement) puis les diagrammes réels dans le cas résonnant et dans le cas « idéal ».

➤ **Etude du signal d'entrée.**

On place en entrée du filtre le signal issu de l'alimentation à découpage qui prend la forme d'un signal créneau de rapport cyclique  $\alpha = \frac{T_H}{T}$  défini de la manière

$$\text{suivante } e(t) = \begin{cases} V_0 & \text{si } 0 \leq t < \alpha T \\ 0 & \text{si } \alpha T \leq t < T \end{cases} \text{ et dont une représentation}$$

est donnée sur la figure ci-contre.



- Rappeler la définition de la valeur moyenne d'un signal périodique et déterminer  $\langle e(t) \rangle_T$

La décomposition en série de Fourier du signal s'écrit :  $e(t) = \alpha V_0 + \frac{2V_0}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\sin(k\pi\alpha)|}{k} \cos(k\omega_F t + \varphi_k)$

- Comment appelle-t-on  $\omega_F$  ? Rappeler son lien avec la période  $T$ .
- Donner l'amplitude de la composante constante dans cette décomposition et commenter.
- Donner l'amplitude du fondamental et de l'harmonique de rang 2.

➤ **Etude du signal de sortie.**

On souhaite donc produire en sortie du filtre une tension constante à partir du signal  $e(t)$ .

- Le filtre étudié permet-t-il de réaliser cette opération ? A quelle condition qualitative sur la fréquence propre  $f_0$  du filtre l'opération sera-t-elle réalisable ?

Pour simplifier l'étude, on suppose que le signal  $e(t)$  peut être approximé par la somme des deux

composantes suivantes :  $e(t) \approx \alpha V_0 + \frac{2V_0}{\pi} |\sin(\pi\alpha)| \cos(\omega_F t + \varphi_E)$

- Quelle propriété du circuit permet de dire qu'en sortie la tension prendra la forme  $s(t) \approx s_0 + s_1 \cos(\omega_F t + \varphi_S)$  ?
- Exprimer l'amplitude  $s_0$  de la tension de sortie en fonction de  $\alpha$ ,  $V_0$  et  $H_0$ .
- Dans quel domaine de fréquence doit se trouver la fréquence fondamentale  $f_F$  du signal ? En déduire une expression approchée de  $s_1$  en fonction de  $\alpha$ ,  $V_0$ ,  $f_F$  et  $f_0$ .

**APPLICATIONS NUMERIQUES :**

On donne les valeurs suivantes pour les différents éléments introduits dans le problème.

$$R=100\Omega, C=10,0\mu F, L=200mH, f_F=5kHz, V_0=15V \text{ et } \alpha=1/3.$$

- Calculer  $f_0$  et  $Q$  pour le filtre. Commenter les valeurs obtenues.
- Calculer  $s_0$  et commenter la valeur obtenue.
- Calculer le taux d'ondulation  $s_1/s_0$  du signal produit par le filtre et commenter le résultat.