

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

**Les candidats sont invités à encadrer les réponses finales aux questions posées.**

**L'usage de calculatrices est autorisé.**

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**Problème 1 : Filtrage d'un signal expérimental.**

Les projets LIGO (aux Etats-Unis) et VIRGO (en Europe) se proposent de détecter un objet dont l'existence a été prédite théoriquement depuis 1916 par Albert Einstein lorsqu'il a construit la théorie de la relativité générale : les ondes gravitationnelles.

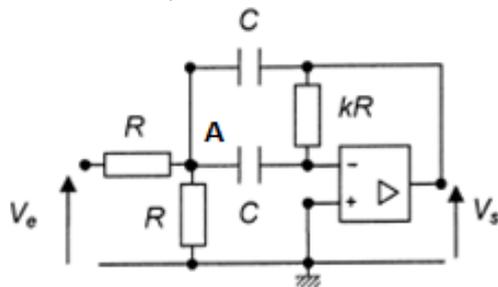
L'expérience menée produit en bout de chaîne d'acquisition une tension électrique de la forme :  $V_{EXP}(t) = V_o(1 + \alpha \cos(\Omega t) + \cos(2\Omega t))$  dont l'information donnant des renseignements sur les ondes gravitationnelles est contenue dans le facteur  $\alpha$  affectant la composante de pulsation  $\Omega$  et qui présente une valeur numérique de  $1,5 \cdot 10^{-1}$ .

On souhaite extraire du signal  $V_{EXP}(t)$  la composante de pulsation  $\Omega$ .

1. Quel type de filtre doit être employé pour réaliser cette opération ? Justifier succinctement.

On se place en régime sinusoïdal forcé, on suppose que le signal d'entrée est de la forme :  $V_e(t) = A_e \cos(\omega t)$ , on note  $\underline{H}(j\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$  la fonction de transfert du filtre.

2. Donner la définition de la fonction de transfert. En déduire l'expression, du signal  $V_s(t)$  (en notations réelles) obtenu en sortie du filtre.



On considère le montage de la figure ci-contre :

3. Effectuer l'analyse qualitative de ce circuit pour vérifier qu'il réalise bien l'opération identifiée en q1.
4. Rappeler les hypothèses valables dans le modèle de l'ALI idéal. En déduire une relation entre  $\underline{V}_-$ ,  $\underline{V}_A$  et  $\underline{V}_S$ .
5. Etablir également une relation entre  $\underline{V}_e$ ,  $\underline{V}_A$  et  $\underline{V}_S$ .

6. Pourquoi peut-on faire l'hypothèse d'un régime de fonctionnement linéaire ? Donner alors la relation liant  $\underline{V}_-$  et  $\underline{V}_+$  et exploiter le circuit pour donner leur expression.

7. Montrer alors que la fonction de transfert de ce filtre s'exprime :  $\underline{H}(jx) = \frac{H_o}{1 + jQ(x - 1/x)}$  où  $x = \frac{\omega}{\omega_o}$

avec  $H_o = -\frac{k}{2}$  ;  $Q = \sqrt{\frac{k}{2}}$  ;  $\omega_o = \frac{1}{RC} \sqrt{\frac{2}{k}}$

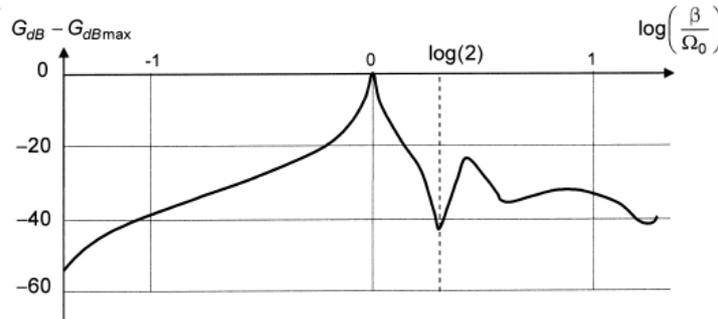
8. Donner la définition du gain en décibel  $G_{dB}(\omega)$  puis déterminer son expression dans le cas étudié ici. Déterminer également l'expression du déphasage  $\varphi(\omega)$ .
9. Déterminer les comportements asymptotiques de  $G_{dB}(\omega)$  et de  $\varphi(\omega)$  sur les domaines basse fréquence et haute fréquence puis étudier la valeur de ces grandeurs à la fréquence propre du filtre.
10. Pour une valeur  $Q=10$  du facteur de qualité, représenter le diagramme de Bode asymptotique en amplitude en précisant les valeurs numériques des pentes et ordonnées associés. Représenter alors au mieux le diagramme de bode en amplitude réel.
11. Définir les pulsations de coupure à -3dB du filtre. Montrer qu'il y a deux valeurs de la pulsation réduite qui correspondent à cette définition pour le filtre étudié et en déduire l'expression de la largeur  $\Delta x$  puis de la largeur  $\Delta\omega$  de cette bande passante.

**Remarque : même si on ne fait pas les calculs, on peut donner l'expression de la largeur de la bande passante en citant le cours.**

On souhaite maintenant établir le signal de sortie du filtre lorsqu'on place en entrée le signal obtenu lors de l'expérience de détection des ondes gravitationnelles.

12. Le système fonctionnant en régime linéaire, rappeler le théorème s'appliquant et donner qualitativement la forme du signal de sortie.
13. Quelle relation doit lier  $\omega_0$  et  $\Omega$  pour que le filtre sélectionne au mieux la composante d'intérêt du signal  $V_{EXP}$ .
14. Déterminer alors les amplitudes  $A_0$ ,  $A_\Omega$  et  $A_{2\Omega}$  des trois composantes du signal de sortie. Exprimer et évaluer alors numériquement  $\frac{A_0}{A_\Omega}$  et  $\frac{A_{2\Omega}}{A_\Omega}$ .
15. Ce filtre permet-il d'extraire la composante d'intérêt du signal expérimental ?

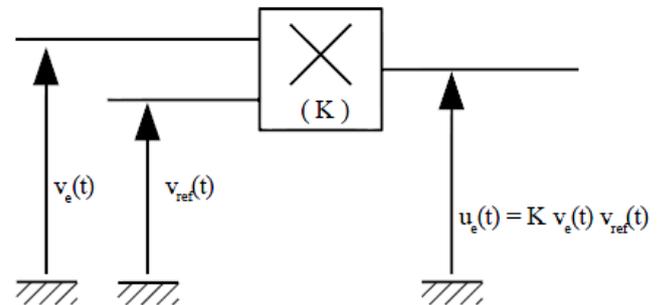
En pratique, on utilise un filtre modifié, dont le diagramme de Bode en amplitude est donné ci dessous.



16. Quelle relation doit lier  $\Omega$  et  $\Omega_0$  pour sélectionner la composante d'intérêt du signal  $V_{EXP}$  ?
17. Evaluer numériquement  $\left(\frac{A_0}{A_\Omega}\right)_R$  et  $\left(\frac{A_{2\Omega}}{A_\Omega}\right)_R$  à la sortie du filtre modifié et conclure.

On s'intéresse maintenant à un système de détection synchrone dont le but est d'extraire très efficacement le signal de faible amplitude mais de pulsation  $\Omega$  bien connue au sein de son environnement bruité.

Le premier étage du système de détection synchrone est constitué d'un circuit multiplieur de constante  $K$  qui prend en entrée le signal expérimental  $v_e(t)$  d'une part, et le signal délivré par une boucle à verrouillage de phase  $v_{ref}(t) = V_o \cos(\Omega t)$  d'autre part. Réaliser ce signal de référence, qui doit impérativement être en phase avec le signal à analyser est techniquement compliqué mais cet aspect n'est pas traité dans ce sujet.



18. Exprimer le signal  $u_e(t)$  en sortie du multiplieur sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux (dont une composante constante).
19. Tracer alors le spectre de  $u_e(t)$ .

Le second étage du système de détection synchrone est constitué d'un filtre passe bas. On souhaite que ce filtre transmette la composante continue d'intérêt en multipliant son amplitude par un facteur  $m=10$  et atténue la composante sinusoïdale de pulsation  $\Omega$  pour qu'elle présente une amplitude  $10^3$  fois plus petite que celle de la composante continue.

On donne les fonctions de transfert suivantes :

$$\underline{H}_1(jx) = \frac{H_o}{1+jx} ; \underline{H}_2(jx) = \frac{H_o \cdot jx}{1+jx} ; \underline{H}_3(jx) = \frac{H_o}{1+j\frac{x}{Q} - x^2} ; \underline{H}_4(jx) = \frac{H_o(-x^2)}{1+j\frac{x}{Q} - x^2}$$

20. Indiquer quelles fonctions de transfert correspondent au type de filtre envisagé. Indiquer alors l'ordre du filtre associé aux fonctions de transfert sélectionnées.
21. En se basant sur les équations des asymptotes basse fréquence et haute fréquence, déterminer le gain statique  $H_{0,1}$  et la pulsation propre  $\omega_{0,1}$  maximale du filtre dans le cas où il est d'ordre 1.
22. En se basant sur les équations des asymptotes basse fréquence et haute fréquence, déterminer le gain statique  $H_{0,2}$  et la pulsation propre  $\omega_{0,1}$  maximale du filtre dans les cas où il est d'ordre 2. Préciser les précautions à prendre pour la mise en œuvre du circuit d'ordre 2.