Description et paramétrage du mouvement d'un point.

Introduction.

La mécanique est la science de l'étude du mouvement des corps. Elle se décompose en deux parties :

- La cinématique désigne l'ensemble des outils nécessaires pour décrire le mouvement de manière formelle.
- La dynamique désigne l'ensemble des lois permettant d'étudier les causes du mouvement observé.

Il est important de bien distinguer ces deux étapes dans les études mécaniques. Elles sont aussi essentielles l'une que l'autre. Dans ce premier chapitre, on ne se soucie donc que de décrire le mouvement d'un système sans se soucier des causes de ce mouvement.

1. Description du point de vue d'un observateur.

1.1. Relativité du mouvement.

Prenons le cas d'un passager assis dans un train lancé sur les rails à pleine vitesse entre Paris et Marseille.

- Selon le point de vue de ce passager, il est immobile par rapport au train, sa position est fixe dans le temps, son vecteur vitesse et son vecteur accélération sont nuls.
- Selon le point de vue d'un ruminant situé dans un champ le long de la voie ferrée, le train et, par conséquent, le passager sont en mouvement, le vecteur position du passager évolue au cours du temps, son vecteur vitesse est non nul et son vecteur accélération peut ne pas être nul.
- Le passager et le ruminant sont deux observateurs qui décrieront le mouvement d'un même objet d'étude de manière différente car leurs points de vue sont différents.

Conclusion : Le **mouvement** d'un objet est une **notion relative** au point de vue adopté, la première précaution à prendre dans une étude cinématique est de préciser le **point de vue adopté** en spécifiant le **référentiel** dans lequel on réalise cette description.

1.2. Définition d'un référentiel.

a. Repère.

Définition : Un repère est la donnée d'un point O qui servira d'origine, et de trois directions fixes, définies par la donnée d'un trièdre non coplanaire de vecteurs unitaires $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, fixes du point de vue de l'observateur considéré.

- La position d'un point M est alors définie dans ce repère par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
- En général, on choisit le triède $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ orthonormé et direct.

b. Horloge.

Définition : L'horloge désigne la référence de temps utilisée par l'observateur pour décrire le mouvement. Elle est décrite entièrement par la donnée d'un instant de référence, l'origine des temps, et par la durée observée entre cet instant de référence et l'instant ou l'observateur voit un évènement survenir.

c. Référentiel.

Définition : Un référentiel permet de décrire le point de vue adopté par un observateur pour décrire un mouvement. Il est constitué d'un repère spatial et d'une horloge.

Dans l'exemple introductif, le référentiel pour l'observateur du train est le suivant :

- Un repère spatial ayant pour origine son siège et les trois directions fixes suivantes : une le long du train, une verticale et pour finir une horizontale perpendiculaire à la première.
- Sa montre avec laquelle il mesure par exemple la durée du voyage en repérant les instants de départ et d'arrivée.

Dans l'exemple introductif, le référentiel pour l'observateur dans le champ est le référentiel terrestre :

- Un repère spatial ayant pour origine sa position et les trois directions fixes suivantes : une le long des rails, une verticale et pour finir une horizontale perpendiculaire à la première.
- Sa montre avec laquelle il mesure par exemple les instants de passage de la tête du train et de la queue du train en face de sa position.

1.3. Postulat de la mécanique classique.

Enoncé : Les horloges de deux référentiels différents mesurent des durées égales.

Ce principe de la mécanique classique est né de l'observation de mouvements qui étaient accessibles à l'époque où il a été formulé :

- Par exemple, pour notre train, la durée du voyage sera la même pour un observateur dans le train et un observateur dans le référentiel terrestre.

Mouvements et interactions.

En 1905, Albert Einstein a exposé dans un article la théorie de la mécanique relativiste. Son objectif était de définir une nouvelle théorie de la mécanique qui soit compatible avec la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell.

Dans cette théorie, les durées mesurées entre deux évènements dépendent de l'observateur considéré :

- Du point de vue d'un observateur fixe dans le référentiel d'étude, on mesure une durée T pour le temps de parcours d'une longueur L par une particule se déplaçant en ligne droite à une vitesse v par rapport au référentiel d'étude.
- Du point de vue de la particule, on mesure une durée T'.

La relation liant T et T' est alors la suivante : $T = T'\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, on constate donc que T>T'. On appelle ce phénomène « dilatation du temps ».

<u>Par exemple</u> : On considère un proton participant au rayonnement cosmique. Il entre en collision avec un atome des couches hautes de l'atmosphère terrestre, ce qui génère un muon à une altitude de l'ordre de 30km.

Ce muon est une particule élémentaire présentant une vitesse proche de la lumière, elle met donc, dans le référentiel terrestre une durée de 10^{-4}s pour atteindre la surface de la planète.

Le muon est une particule qui présente une durée de ½ vie de 2.10^{-6}s, sur cette durée la moitié d'une population de muons générés à haute altitude se serait dissociée. Le rapport entre le temps de transit et la durée de vie entrainerait une population de muons à la surface terrestre qui serait divisé par 2^{50}, on en capterait très peu.

L'observation est tout autre, elle est beaucoup plus cohérente avec une population divisée par 2^8 ce qui suggère que le temps vu par la particule lors de ce trajet est de l'ordre de 3 fois la durée de vie. On peut en déduire que la vitesse du muon est de l'ordre de 99,8% de la vitesse de la lumière.

<u>Conclusion</u> : Le postulat d'invariance des horloges lors d'un changement de référentiel est une approximation qu'on jugera valide dans la plupart des études menées cette année. Cette approximation est plus généralement valable dès lors que les vitesses des objets étudiés respectent v<c/10.

2. Description du mouvement d'un point.

2.1. Eléments de description.

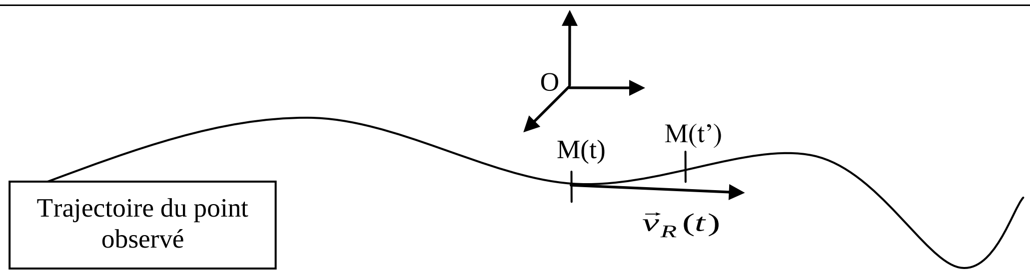
a. <u>Vecteur position.</u>

La description du mouvement d'un point M dans un référentiel passe par la donnée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de ce point à chaque instant t.

On dit que l'on définit alors la trajectoire du mouvement.

b. <u>Vecteur vitesse.</u>

<u>Définition</u> : Le vecteur vitesse $\vec{v}_{M,R}$ d'un point dans un référentiel R est la dérivée temporelle du vecteur position dans ce référentiel : $\vec{v}_{M,R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R$



<u>Propriété</u> : Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire du point M et est dirigé dans le sens du mouvement.

c. <u>Vecteur accélération.</u>

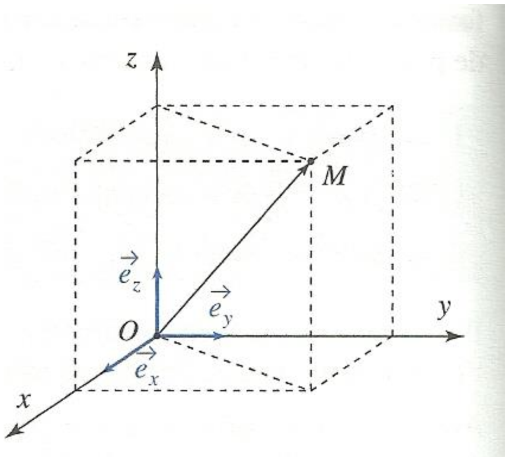
<u>Définition</u> : Le vecteur accélération $\vec{a}_{M,R}$ d'un point dans un référentiel R est la dérivée temporelle du vecteur vitesse dans ce référentiel : $\vec{a}_{M,R} = \left(\frac{d\vec{v}_{M,R}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R$

On exprime la vitesse sous la forme suivante : $\vec{v}_{M,R} = \left\|\vec{v}_{M,R}\right\|.\vec{u}_{M,R}$

Alors l'accélération s'écrira sous la forme : $\vec{a}_{M,R} = \left(\frac{d\left\|\vec{v}_{M,R}\right\|}{dt}\right)_R.\vec{u}_{M,R} + \left\|\vec{v}_{M,R}\right\|\frac{d\vec{u}_{M,R}}{dt}$. Elle est composée :

- d'une accélération tangentielle : $\vec{a}_{M,R,//} = \left(\dfrac{d\left\|\vec{v}_{M,R}\right\|}{dt}\right)_R .\vec{u}_{M,R}$ dont la norme est la dérivée par rapport au temps de la norme de la vitesse.
- d'une accélération normale : $\vec{a}_{M,R,\perp} = \left\|\vec{v}_{M,R}\right\| \dfrac{d\vec{u}_{M,R}}{dt}$ dont la norme est proportionnelle à la vitesse et à la dérivée par rapport au temps du vecteur unitaire donnant la direction et le sens de la vitesse.

2.2. La base de projection cartésienne.



<u>Définition</u> : La base cartésienne désigne un trièdre orthonormé direct de vecteurs généralement désignés par $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ désignant trois directions fixes dans le référentiel d'étude. Les coordonnées dans cette base de projection sont définies par : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

avec $x = \vec{e}_x.\overrightarrow{OM}$; $y = \vec{e}_y.\overrightarrow{OM}$; $z = \vec{e}_z.\overrightarrow{OM}$

<u>Expression d'un petit vecteur déplacement.</u>
Le petit vecteur déplacement s'exprime directement à partir des petites variations des trois coordonnées :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z}$$

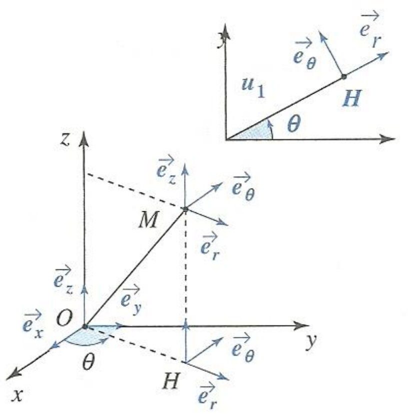
<u>Vecteur vitesse</u> : on dérive le vecteur position exprimé dans la base cartésienne par rapport au temps :

$$\boxed{\left(\frac{d.\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z = \dot{x}.\vec{e}_x + \dot{y}.\vec{e}_y + \dot{z}.\vec{e}_z}$$

<u>Vecteur accélération</u> : on dérive le vecteur vitesse exprimé dans la base cartésienne par rapport au temps :

$$\boxed{\left(\frac{d.\vec{v}_{M/R}}{dt}\right)_R = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z = \ddot{x}.\vec{e}_x + \ddot{y}.\vec{e}_y + \ddot{z}.\vec{e}_z}$$

2.3. La base de projection cylindro-polaire.



<u>Définition</u> : La base cylindrique, encore appelée cylindro-polaire, désigne un trièdre orthonormé direct de vecteurs généralement désignés par $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ dépendant du paramètre angulaire θ décrivant la position du point étudié et $\vec{e}_z$ désignant une direction fixe dans le référentiel d'étude. Les coordonnées dans cette base de projection sont (r, θ, z).

Le vecteur position s'exprime alors: $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$.

<u>Expression d'un petit vecteur déplacement.</u>

Si on considère un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ au départ du point : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$

On peut l'exprimer : $\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr.\vec{e}_r + rd\theta.\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z}$

<u>Propriété :</u> Les vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ dépendent du point M considéré plus particulièrement de la valeur de l'angle θ, on peut exprimer les variations de ces vecteurs de la base lorsque le point M change par : $\dfrac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta$; $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$.

Démonstration : Les vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ sont variables selon l'angle θ décrivant la position du point M considéré.

Pour en déterminer les dérivées en fonction de cet angle θ, on évalue d'abord la variation de $\vec{e}_r$ pour deux angles θ' et θ : $(\vec{e}_r(\theta') - \vec{e}_r(\theta)) = (\cos(\theta' - \theta)\vec{e}_r(\theta) + \sin(\theta' - \theta)\vec{e}_\theta(\theta))$

On divise alors à gauche est à droite par $\theta' - \theta$ et on fait tendre cette différence vers zéro. On obtient alors :

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}=\lim_{\theta'\to\theta}\frac{\left(\vec{e}_r(\theta')-\vec{e}_r(\theta)\right)}{\theta'-\theta}=\lim_{\theta'\to\theta}\frac{\left(\cos(\theta'-\theta)\vec{e}_r(\theta)+\sin(\theta'-\theta)\vec{e}_\theta(\theta)\right)}{\theta'-\theta}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}=\left(\frac{d\cos(\theta'-\theta)}{d\theta'}\right)_{\theta'=\theta}\vec{e}_r(\theta)+\left(\frac{d\sin(\theta'-\theta)}{d\theta'}\right)_{\theta'=\theta}\vec{e}_\theta(\theta)=\vec{e}_\theta$$ De même : $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}=-\vec{e}_r$

<u>Vecteur vitesse.</u>
On dérive le vecteur position exprimé dans la base cylindro-polaire par rapport au temps :

$$\left(\frac{d.\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R=\left(\frac{d\left(r\vec{e}_r+z\vec{e}_Z\right)}{dt}\right)_R=\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)+\frac{dz}{dt}\vec{e}_z=\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)+\frac{dz}{dt}\vec{e}_z=\dot{r}.\vec{e}_r+r\dot{\theta}.\vec{e}_\theta+\dot{z}.\vec{e}_z$$

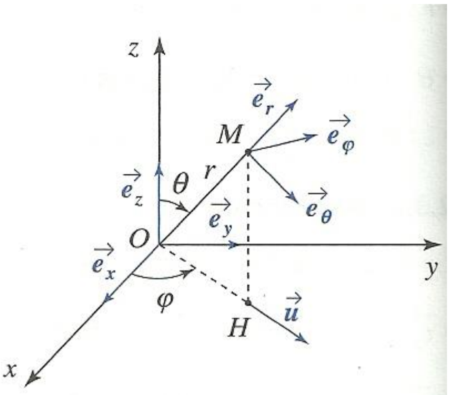
Finalement : $\boxed{\left(\frac{d.\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R=\left(\frac{d\left(r\vec{e}_r+z\vec{e}_Z\right)}{dt}\right)_R=\dot{r}.\vec{e}_r+r\dot{\theta}.\vec{e}_\theta+\dot{z}.\vec{e}_z}$

<u>Vecteur accélération.</u>
On dérive le vecteur vitesse exprimé dans la base cylindropolaire par rapport au temps :

$$\left(\frac{d.\vec{v}_{M/R}}{dt}\right)_R=\left(\frac{d}{dt}\left(\dot{r}.\vec{e}_r+r\dot{\theta}.\vec{e}_\theta+\dot{z}.\vec{e}_z\right)\right)_R=\ddot{r}.\vec{e}_r+\dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt}+\dot{r}\dot{\theta}.\vec{e}_\theta+r.\ddot{\theta}\vec{e}_\theta+r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}+\ddot{z}\vec{e}_z=\ddot{r}.\vec{e}_r+\dot{r}\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}+\dot{r}\dot{\theta}.\vec{e}_\theta+r.\ddot{\theta}\vec{e}_\theta+r\dot{\theta}\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}+\ddot{z}\vec{e}_z$$

Finalement : $\boxed{\left(\frac{d.\vec{v}_{M/R}}{dt}\right)_R=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right).\vec{e}_r+\left(2\dot{r}.\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right).\vec{e}_\theta+\ddot{z}.\vec{e}_z}$

2.4. La base de projection sphérique.



<u>Définition</u> : La base sphérique désigne un trièdre orthonormé direct de vecteurs généralement désignés par $\left(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi\right)$. Les trois vecteurs sont dépendants du point considéré. Les coordonnées dans cette base de projection sont (r,θ,φ).
Le vecteur position peut alors s'exprimer sous la forme : $\overrightarrow{OM}=r\vec{e}_r$.

<u>Expression d'un petit vecteur déplacement.</u>
Si on considère un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ au départ du point : $\overrightarrow{OM}=r\vec{e}_r$

On peut l'exprimer : $\boxed{d\overrightarrow{OM}=dr.\vec{e}_r+rd\theta.\vec{e}_\theta+r\sin\theta.d\varphi.\vec{e}_\varphi}$

<u>Vecteur vitesse.</u>
Il est difficile d'exprimer les dérivées des vecteurs unitaires dans cette base. On peut cependant trouver le vecteur vitesse assez simplement à partir de l'expression du petit vecteur déplacement.

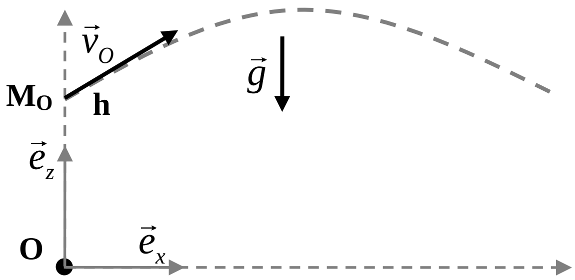
$d\overrightarrow{OM}=dr.\vec{e}_r+rd\theta.\vec{e}_\theta+r\sin\theta.d\varphi.\vec{e}_\varphi$ On obtient : $\boxed{\vec{v}_{M/R}=\dot{r}.\vec{e}_r+r\dot{\theta}.\vec{e}_\theta+r\dot{\varphi}\sin\theta.\vec{e}_\varphi}$

<u>Vecteur accélération.</u>
On donne juste ici son expression, elle n'est pas à retenir !!!!

$$\boxed{\vec{a}_{M/R}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta.\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\theta+\left(r\sin\theta.\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\theta}.\dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi}$$

3. Choix d'une base adaptée pour l'étude d'un mouvement.

3.1. Mouvement à accélération constante.



L'étude du mouvement d'une balle dans le référentiel terrestre fourni un bon exemple de mouvement à accélération constante, puisque dans un modèle simple, ce système évolue dans le champ de pesanteur terrestre qui impose une accélération $\vec{a}_{M/R}=\vec{g}$ où $\vec{g}$ est le vecteur accélération de la pesanteur à la surface de la planète.

L'étude théorique de tout mouvement commence par le choix de deux éléments essentiels :

- Le référentiel dans lequel on effectue la description du mouvement étudié. On choisit ici de manière relativement évidente le référentiel du laboratoire (ou le référentiel terrestre local).

- La base de projection la plus adaptée à l'étude du mouvement considéré. Ici, on a deux éléments qui guident notre choix :
  - Le vecteur accélération constant qui introduit une direction verticale privilégiée
  - Le vecteur vitesse initiale qui présente une composante horizontale et une composante verticale.

On a donc deux directions fixes qui se dégagent de la description du système, on s'oriente vers une base de projection cartésienne s'appuyant sur ces deux directions.

On peut alors déterminer les expressions des vecteurs accélération, vitesse puis position.

Pour le vecteur accélération, on aboutit à l'expression : $\vec{a}_{M/R} = -g\vec{e}_z$,

on suppose qu'à l'instant initial : $\vec{v}_{M/R}\left(t=0\right) = v_{Ox}\vec{e}_x + v_{Oz}\vec{e}_z$ et $\overrightarrow{OM}\left(t=0\right) = h\vec{e}_z$

Par projection dans la base cartésienne, on obtient : $a_x = 0 \quad et \quad a_z = -g$

On détermine les composantes du vecteur vitesse : $\dfrac{dv_x}{dt} = a_x = 0 \quad et \quad \dfrac{dv_z}{dt} = a_z = -g$

On intègre en tenant compte des conditions initiales : $v_x = v_{Ox} \quad et \quad v_z = v_{Oz} - gt$

On détermine les composantes du vecteur position : $\dfrac{dx}{dt} = v_{Ox} \quad et \quad \dfrac{dz}{dt} = v_{Oz} - gt$

On intègre en tenant compte des conditions initiales : $x = v_{Ox}t \quad et \quad z = h + v_{Oz}t - \dfrac{1}{2}gt^2$

Pour finir, on peut déterminer la trajectoire du point étudié dans le plan $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_z)$ en déterminant z(x) :

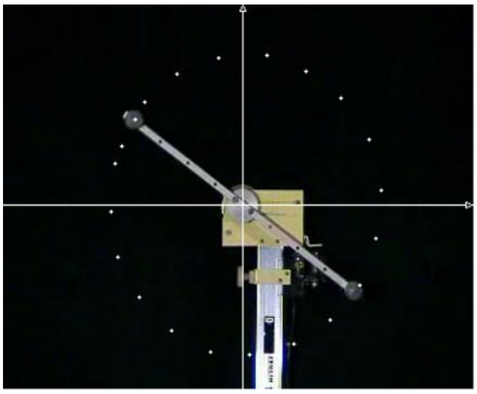
Ici on peut simplement exprimer le temps en fonction de x ce qui donne. $t = \dfrac{x}{v_{Ox}}$

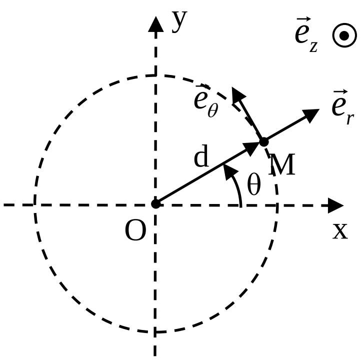
Puis en réintroduisant dans l'expression de la cote $z = h + \dfrac{v_{Oz}}{v_{Ox}}x - \dfrac{g}{2v_{Ox}^2}x^2$ qui est l'équation d'une parabole.

3.2. Etude du mouvement circulaire.

a. <u>Etude du mouvement circulaire à vitesse constante.</u>

On considère une barre tournant autour d'un axe fixe et par rapport à laquelle elle est équilibrée.





On doit effectuer un choix adapté de la base de projection pour mener l'étude de ce mouvement.

On identifie ici une trajectoire circulaire de centre O le centre de la barre qui est fixe dans le référentiel d'étude. La base de projection polaire $\left(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta\right)$ dans le plan du mouvement, complétée éventuellement en base de projection cylindrique avec un vecteur « axial » en $\left(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z\right)$.

Dans cette base de projection, on peut exprimer le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = d\vec{e}_r$

La vitesse de rotation est constante, on peut l'appeler $\dot{\theta} = \omega$ et le vecteur vitesse s'exprime alors :

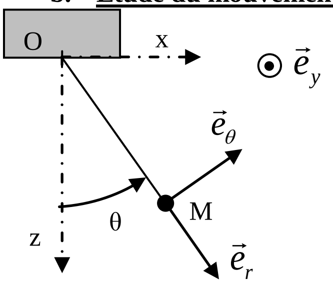
$$\vec{v}_{M/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\left(d\vec{e}_r\right)}{dt}\right)_R = d\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_R = d\dot{\theta}.\vec{e}_\theta = d\omega.\vec{e}_\theta = v.\vec{e}_\theta$$

Où v la vitesse du point matériel sur le cercle est donc proportionnelle au rayon et à la vitesse de rotation ω.

Il reste à déterminer le vecteur accélération : $\vec{a}_{M/R} = \dfrac{d}{dt}\left(d\omega.\vec{e}_\theta\right) = d\omega\left(\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right) = -d\omega^2\vec{e}_r = -\dfrac{v^2}{d}\vec{e}_r$.

L'accélération est centripète (dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire) et elle varie en fonction du carré de la vitesse et en inverse du rayon. Ces caractéristiques sont assez intuitives pour tout conducteur ou passager d'une voiture.

b. Etude du mouvement circulaire à vitesse variable.



Pour illustrer ce type de système, on va étudier le mouvement d'un pendule simple dans le plan vertical $(O,\vec{e}_z,\vec{e}_x)$

La trajectoire est circulaire de centre O fixe dans le référentiel, on utilise toujours un base (cylindro-)polaire $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_y)$:

Le vecteur position s'exprime $\overrightarrow{OM} = l\vec{e}_r$

Le vecteur vitesse s'exprime $\vec{v}_{M/R} = l\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right) = l\dot{\theta}.\vec{e}_\theta = v.\vec{e}_\theta$.

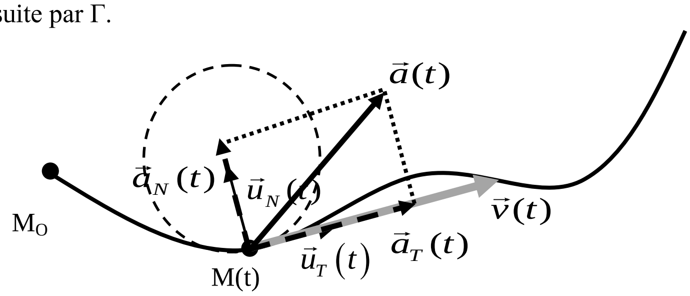
Le vecteur accélération s'exprime : $\vec{a}_{M/R} = l\ddot{\theta}.\vec{e}_\theta + l\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = l\ddot{\theta}.\vec{e}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{e}_r = \dot{v}.\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{l}\vec{e}_r$

On retrouve la même composante centripète de l'accélération dirigée vers le centre du mouvement circulaire, on voit apparaître une nouvelle composante ortho radiale liée aux variations de la vitesse angulaire du mouvement circulaire.

3.3. Repère de Frenet pour une trajectoire plane connue.

Le repère de Frenet permet d'effectuer une généralisation à toutes les trajectoires planes des observations faites sur la trajectoire circulaire lorsqu'on introduit la vitesse du point le long de la trajectoire circulaire dans les expressions des éléments de cinématique.

On considère une trajectoire plane quelconque qu'on désignera par la suite par Γ.



- Le premier élément introduit est l'élément qui repère la position du point M le long de la trajectoire.

Puisque la trajectoire est imposée, il suffit de donner la distance parcourue par ce point depuis un point de référence noté ici M_O=M(t=0). On nomme ce paramètre abscisse curviligne et on le note généralement s(t).

Son expression mathématique est alors : $\boxed{s(t) = (M_O M)_\Gamma = \int_{M_O \xrightarrow{\Gamma} M} ds}$ où ds désigne la distance élémentaire parcourue le long de Γ par le point M.

- En un point M(t) de la trajectoire, on peut alors introduire $\vec{u}_T$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire orienté dans le sens de parcours de la trajectoire.

Le vecteur déplacement élémentaire du point M est alors exprimé facilement par : $d\overrightarrow{M_O M} = ds.\vec{u}_T$

La vitesse du point M le long de la trajectoire est alors $\boxed{\vec{v}_{M/R} = \frac{d\overrightarrow{M_O M}}{dt} = \frac{ds}{dt}.\vec{u}_T = \dot{s}.\vec{u}_T = v.\vec{u}_T}$

On peut alors exprimer l'accélération au point M sous la forme $\vec{a}_{M/R} = \frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt} = \dot{v}.\vec{u}_T + v.\frac{d\vec{u}_T}{dt}$

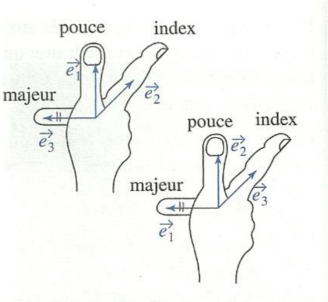
- On introduit alors $\vec{u}_N$ le vecteur unitaire donnant la direction et le sens de $\frac{d\vec{u}_T}{dt}$ et le rayon de courbure ρ(M) de la trajectoire en M(t) tels que $\frac{d\vec{u}_T}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{u}_N$. Géométriquement, ρ sera alors le rayon du cercle osculateur de la trajectoire en M, c'est-à-dire le cercle approximant au mieux la trajectoire en ce point.

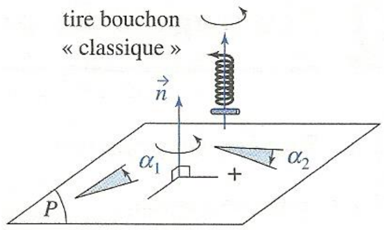
L'accélération dans le repère de Frenet s'exprime : $\boxed{\vec{a}_{M/R} = \dot{v}.\vec{u}_T + v.\frac{ds}{dt}\frac{d\vec{u}_T}{ds} = \dot{v}.\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}.\vec{u}_N}$

A propos des bases orthonormées directes.

Règles pour construire un trièdre direct de vecteurs (ou pour vérifier le sens direct d'un trièdre).

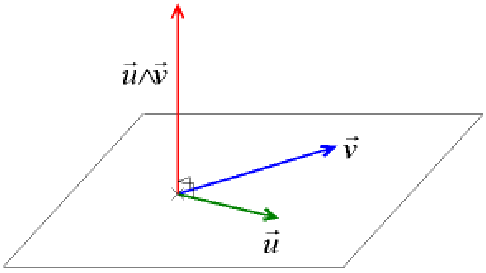
- *Les trois doigts de la main droite :* $\vec{e}_1$ aligné sur le pouce tendu dans le plan de la paume, $\vec{e}_2$ aligné sur l'index dans le plan de la paume, alors $\vec{e}_3$ aligné sur le majeur dressé perpendiculairement à la paume.
- *Le tire bouchon :* On imagine que l'on fait tourner un tire bouchon dans le sens allant de $\vec{e}_1$ vers $\vec{e}_2$ alors $\vec{e}_3$ est orienté dans la direction et le sens de déplacement du tire bouchon.





Base orthonormée directe :
Une base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est un trièdre dont chaque vecteur est de norme unitaire, chaque couple de vecteur est de produit scalaire nul (on dit encore qu'ils sont orthogonaux deux à deux), et de sens direct.

A propos du produit vectoriel.



Le produit vectoriel est une opération sur les vecteurs dans un espace euclidien de dimension 3. Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. Le produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ de ces deux vecteurs, est défini par les propriétés suivantes :

- $\vec{w}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (orthogonal au plan défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$).
- Le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est direct (ou de sens direct).
- $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.|\sin(\vec{u}, \vec{v})|$

Propriété : Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est le vecteur nul.

Pour déterminer le produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ à partir de leurs coordonnées dans une base orthonormée directe, on peut utiliser l'expression suivante :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2.v_3 - u_3 v_2 \\ u_3.v_1 - u_1 v_3 \\ u_1.v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Capacités exigibles

- Savoir que le mouvement est relatif à un référentiel.
- Citer une situation ou la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
- Définir les vecteurs position, vitesse et accélération d'un point
- Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- Etablir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté à la situation étudiée.
- Dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré, exprimer les vecteurs vitesse et position en fonction du temps. Etablir l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
- Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme ou non uniforme : Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
- Repérage d'un point dont la trajectoire est connue, repère de Frenet : Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur acceleration, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle.