Problème 1 : Filtrage d'un signal expérimental.

1. Pour conserver la composante de pulsation Ω, dans un signal contenant des composantes de pulsation 0 (continu), Ω et 2Ω, il faut utiliser un filtre passe bande en faisant en sorte que seule la composante de pulsation Ω soit dans la bande passante.

2. Par définition de la fonction de transfert, en notation complexe : $\boxed{\underline{V}_S(t) = \underline{H}(j\omega)\underline{V}_e(t)}$

Lorsqu'on repasse en notation réelle, on obtient : $\boxed{V_s(t) = G(\omega)A_e\cos(\omega t + \varphi)}$

3. Qualitativement, à BF, les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts, il n'y a alors aucune connexion entre l'entrée et la sortie et $(V_S=V_-)_{i-=0}=V_+=0$. Le filtre coupe les BF.

Qualitativement, à HF, les condensateurs sont équivalents à des fils, la sortie est alors reliée par un fil à la borne (-), et la borne (+) est connectée à la masse. Le filtre coupe les HF.

On en conclut que le circuit réalise bien le Passe-Bande voulu.

4. Dans le modèle de l'ALI idéal, la résistance d'entrée de l'ALI est infinie, en conséquence de quoi les courants entrants par les bornes d'entrée (-) et (+) sont nuls. Dans ce modèle, on considère également que la résistance de sortie de l'ALI est nulle.

On peut alors écrire la loi des nœuds en terme de potentiel en (-) : $\boxed{(\underline{V}_A - \underline{V}_-)\, jC\omega + \frac{(\underline{V}_S - \underline{V}_-)}{kR} = 0}$

5. On écrit aussi la loi des nœuds en terme de potentiel en A :

$$\boxed{(\underline{V}_- - \underline{V}_A)\, jC\omega + (\underline{V}_S - \underline{V}_A)\, jC\omega + \frac{(\underline{V}_e - \underline{V}_A)}{R} + \frac{(0 - \underline{V}_A)}{R} = 0}$$

6. On observe une boucle de rétroaction sur l'entrée (-) on peut donc faire l'hypothèse d'un fonctionnement linéaire. On en conclut que : $\boxed{\underline{V}_- = \underline{V}_+ = 0}$

7. On traduit les deux lois des nœuds en terme de potentiel pour obtenir deux expressions de $\underline{V}_A$:

$$\underline{V}_A = -\frac{\underline{V}_S}{jkRC\omega} = \frac{1}{2}\frac{\underline{V}_S\, jRC\omega + \underline{V}_e}{jRC\omega + 1} \text{ d'où } \underline{V}_S\left(\frac{j2RC\omega + 2}{jkRC\omega} + jRC\omega\right) = -\underline{V}_e$$

D'où $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_e}{\underline{V}_S} = \frac{-\frac{k}{2}}{1 + j\left(\frac{RCk}{2}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$ de la forme $\boxed{\underline{H}(jx) = \frac{H_O}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_O}$

<u>Par identification</u> : $\boxed{H_O = -\frac{k}{2}}$; $\frac{Q}{\omega_O} = \frac{RCk}{2}$ $\quad Q\omega_O = \frac{1}{RC}$; soit $\boxed{Q = \sqrt{\frac{k}{2}} \quad \omega_O = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{2}{k}}}$

8. Par définition, le gain en décibel G_{dB} s'exprime : $\boxed{G_{dB}(x) = 20.\log(G(x))}$

Dans le cas étudié, il s'exprime : $\boxed{G_{dB}(x) = 20.\log|H_O| - 10.\log\left(1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right)}$

Le déphasage φ s'exprime : $\boxed{\varphi = \pi - \arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)}$

9.

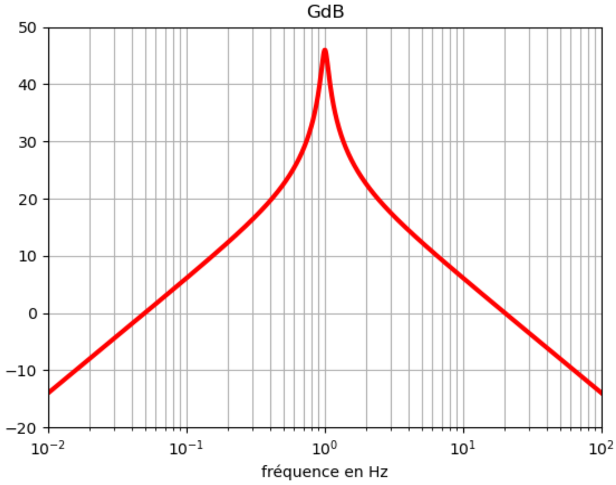
<u>Sur le domaine BF</u> : $\boxed{G_{dB}(x) \to 20\log|H_O| - 20.\log(Q) + 20\log x}$ $\quad \boxed{\varphi \to \frac{3\pi}{2}}$

<u>Sur le domaine HF</u> : $\boxed{G_{dB}(x) \to 20\log|H_O| - 20.\log(Q) - 20\log x}$ $\quad \boxed{\varphi \to \frac{\pi}{2}}$

<u>Pour le cas x=1</u> :

$\boxed{G_{dB}(1) = 20\log|H_O|}$ $\quad \boxed{\varphi = \pi}$

10. Le diagramme est donné ci dessous.



11. La bande passante à -3dB est le domaine de pulsation réduite sur lequel le gain en décibel reste supérieur au gain maximal -3dB correspondant à un gain : $\boxed{G(x) > G_{\max}/\sqrt{2}}$

En remplaçant dans les expressions, on arrive à $Q^2\left(x - 1/x\right)^2 < 1$

On cherche donc les racines positives des deux polynômes : $\left(x^2 - \frac{1}{Q}x - 1\right)$ et $\left(x^2 + \frac{1}{Q}x - 1\right)$

On obtient alors : $x_2' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}\right)$ et $x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}\right)$

La bande passante est alors donnée par $[x_2', x_2]$ de largeur: $\boxed{\Delta x = x_2 - x_2' = \frac{1}{Q}}$ on en déduit $\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_O}{Q}}$

12. Le signal d'entrée est la somme de 3 termes. Le système étant linéaire, on peut appliquer le théorème de superposition et affirmer que le signal de sortie sera composé de la somme des réponses du filtre lorsqu'on place en entrée chacun des termes individuellement.

13. On souhaite que le filtre sélectionne au mieux la composante d'intérêt et pour cela on centre la bande passante sur la pulsation de cette composante. Il faut alors que ω_O s'identifie à Ω : $\boxed{\omega_O = \Omega}$

14. Pour chaque composante, le gain du filtre donne le lien entre les amplitudes en entrée et en sortie : $A_S(\omega) = G(\omega)A_e(\omega)$

On obtient donc : $\boxed{A_O = 0}$; $\boxed{A_\Omega = \alpha|H_O|V_O}$; $\boxed{A_{2\Omega} = \frac{|H_O|V_O}{\sqrt{1 + 2,25.Q^2}}}$ A.N : $\boxed{\frac{A_O}{A_\Omega} = 0}$; $\boxed{\frac{A_{2\Omega}}{A_\Omega} = 0,44}$

15. Au vue du rapport $\frac{A_{2\Omega}}{A_\Omega}$, on doit conclure que l'extraction n'est pas correcte avec le filtre passe bande d'ordre 2 étudié car la composante de pulsation 2Ω présente une amplitude non négligeable.

16. Il faut que $G_{dB,\max}$ soit obtenu pour la composante d'intérêt, il faut donc que $\boxed{\Omega_O = \Omega}$

17. Sur le graphique, on lit : $G_{dB}(0) - G_{dB,\max} = -53dB$ ce qui donne : $G(0)/G(\Omega) = 10^{-53/20}$

De même, on lit : $G_{dB}(2\Omega) - G_{dB,\max} = -42dB$ ce qui donne : $G(2\Omega)/G(\Omega) = 10^{-42/20}$

On obtient alors : $\boxed{\frac{A_O}{A_\Omega} = 1,5.10^{-2} = 1,5\%}$ et $\boxed{\frac{A_{2\Omega}}{A_\Omega} = 5,3.10^{-2} = 5,3\%}$

Avec ce nouveau filtre, on a pu réduire l'amplitude des deux composantes qui parasitent la mesure à des valeurs négligeables devant celle du signal d'intérêt. Ce filtre assure bien mieux l'extraction de la composante utile du signal d'entrée.

18. On utilise les expressions des tensions en entrée du filtre pour exprimer la tension en sortie pour obtenir : $u_e(t) = KV_O^2\left(1+\alpha\cos(\Omega t)+\cos(2\Omega t)\right)\cos(\Omega t)$

On a alors en utilisant les relations de trigonométrie : $\cos^2(\Omega t) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\Omega t)\right)$

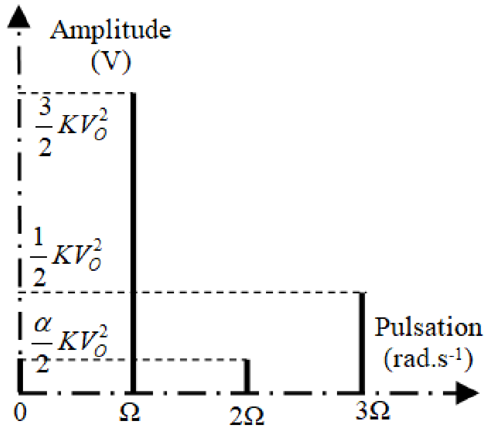
$$\cos(\Omega t)\cos(2\Omega t) = \frac{1}{2}\left(\cos(\Omega t)+\cos(3\Omega t)\right)$$

On obtient : $\boxed{u_e(t) = KV_O^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}\cos(\Omega t)+\frac{\alpha}{2}\cos(2\Omega t)+\frac{1}{2}\cos(3\Omega t)\right)}$

Ce signal comporte quatre composantes :

- Une de pulsation nulle et d'amplitude $\frac{\alpha}{2}KV_O^2$
- Une de pulsation Ω et d'amplitude $\frac{3}{2}KV_O^2$
- Une de pulsation 2Ω et d'amplitude $\frac{\alpha}{2}KV_O^2$
- Une de pulsation 3Ω et d'amplitude $\frac{1}{2}KV_O^2$

19. Le spectre du signal obtenu en sortie du multiplieur présente alors l'allure suivante



20. Par une analyse des comportements asymptotiques, on conclut que :
    - $\underline{H}_1$ correspond à un filtre passe-bas d'ordre 1.
    - $\underline{H}_3$ correspond à un filtre passe-bas d'ordre 2.

21. Pour le filtre passe bas d'ordre 1, on souhaite un facteur de multiplication de la composante continue m=10. Le comportement asymptotique de la fonction de transfert donne $\boxed{\underline{H}_{1,BF} = H_{O,1} = m}$.

La composante continue présente une amplitude $\frac{\alpha m}{2}KV_O^2$

Avec Ω dans le domaine HF : $\underline{H}_1(j\Omega) = -jm\frac{\omega_{O,1}}{\Omega}$

La composante associée présente une amplitude $\frac{3m}{2}KV_O^2\frac{\omega_{O,1}}{\Omega}$

On souhaite donc que $\frac{3m}{2}KV_O^2\frac{\omega_{O,1}}{\Omega} < 10^{-3}\frac{\alpha m}{2}KV_O^2$

d'où $\boxed{\omega_{O,1} < \frac{\alpha}{3}\Omega 10^{-3}}$

22. Pour le filtre passe bas d'ordre 2, on souhaite un facteur de multiplication de la composante continue m=10. Le comportement asymptotique de la fonction de transfert donne $\boxed{\underline{H}_{3,BF} = H_{O,2} = m}$.

La composante continue présente alors une amplitude $\frac{\alpha m}{2}KV_O^2$

En supposant que Ω est située dans le domaine HF : $\underline{H}_3(j\Omega) = -jm\left[\frac{\omega_{O,2}}{\Omega}\right]^2$

La composante de pulsation Ω présente alors une amplitude $\frac{3m}{2}KV_O^2\left[\frac{\omega_{O,2}}{\Omega}\right]^2$

On souhaite donc que $\frac{3m}{2}KV_O^2\left[\frac{\omega_{O,2}}{\Omega}\right]^2 < 10^{-3}\frac{\alpha m}{2}KV_O^2$ d'où $\boxed{\omega_{O,2} < \Omega\sqrt{\frac{\alpha}{3}10^{-3}}}$

Pour le filtre d'ordre 2, on évite les comportements non désiré autour de la fréquence propre en choisissant un facteur de qualité proche de la valeur $\boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{2}}}$.