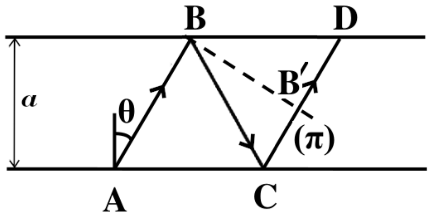
Problème 1 : Modes propres dans une fibre à saut d'indice.



On considère une fibre optique à saut d'indice cylindrique, composée de deux cylindres coaxiaux de section circulaire constitués de milieux homogènes, linéaires et isotropes. L'indice de la partie centrale, appelée cœur, est noté n_1 et celui de la partie externe, appelée gaine, est noté n_2 ; avec $n_2 < n_1$. Le cœur est de diamètre a. Données : $n_1=1,456$ et $n_2=1,410$.

1. Montrer que l'onde lumineuse se propage et est guidée dans la fibre à la condition que l'angle θ sur le dioptre cœur-gaine vérifie la relation suivante : $\theta > \theta_l = \arcsin\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)$. Faire l'A.N en° et '.

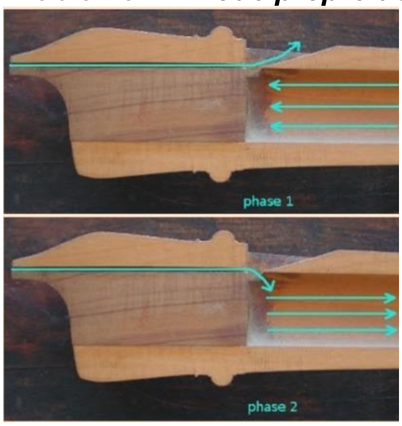
Cette condition, obtenue dans le modèle de l'optique géométrique, ne tient pas compte du caractère ondulatoire de la lumière dont on va chercher à rendre compte dans le modèle simplifié suivant. Lorsque l'onde progresse dans le cœur, elle produit à chaque réflexion sur l'interface cœur-gaine une onde réfléchie avec laquelle elle est susceptible d'engendrer des interférences. Ce phénomène entraine une sélection d'angles d'inclinaison θ_P ($p \in \mathbb{N}$) réellement guidés de l'entrée à la sortie de la fibre. On parle alors de modes propres.
On considère la superposition des deux ondes suivantes :

- La première correspond à l'onde sinusoïdale de longueur d'onde (dans le vide) λ_O se propageant selon le rayon (AB) d'incidence θ.
- La seconde correspond à l'onde sinusoïdale produite par les deux réflexions en B et en C qui se propage donc selon le rayon (CD) de même incidence θ.

Le déphasage entre les deux ondes est alors celui qui est introduit par la propagation de l'onde lumineuse de B en B' en suivant le chemin suivi par la lumière sur les segments [BC] et [CB']. En pointillé, on a représenté la droite perpendiculaire en B' au segment [CD].

2. Exprimer le chemin optique (BCB') en fonction de n_1, a et cos θ. En déduire le déphasage Δφ entre les deux ondes en fonction de n_1, a, λ_O et cos θ.
3. Quel type d'interférence permet d'assurer un maximum d'amplitude pour la superposition des deux ondes ? Comment s'exprime alors le déphasage entre les deux ondes dans cette situation ? En déduire l'expression des valeurs prises par $\cos(\theta_p)$ qui permettent à la lumière d'être guidée dans la fibre.
4. Montrer qu'il existe forcément un nombre fini N de modes propres guidés dans la fibre. Exprimer N en fonction de λ_O, a, n_1 et n_2. Faire l'application numérique pour a=0,1mm et $\lambda_O=1,5.10^{-6}$m.
5. En considérant le mode de rang p fixé, quelle relation doit vérifier la fréquence de l'onde lumineuse pour que l'onde soit transmise par la fibre ? A quel type de filtre correspond la sélection réalisée ? Comment peut-on définir la fréquence de coupure de ce filtre ?
6. Le mode fondamental correspond par définition à la propagation en ligne droite (p=0). Exprimer puis calculer la valeur maximale que peut prendre a pour que la fibre soit de type monomode ? On prendra à nouveau $\lambda_O=1,5.10^{-6}$m.

Problème 2 : mode propre de vibration d'une flute à bec.



(Toutes les illustrations sont issues du site suivant : https://www.flute-a-bec.com/acoustique.html).

Une flûte à bec est un instrument de musique qui fut longtemps l'instrument de torture préférée de l'éducation nationale pendant les cours de musique au niveau collège.
En soufflant dans « le bec » de la flute, le joueur met en vibration l'air au niveau du biseau d'entrée ce qui crée en ce point un nœud de pression acoustique pour la colonne d'air. Un autre nœud de pression est situé à l'extrémité de la flute à bec. On suppose qu'on repère la position le long de la colonne d'air par l'abscisse x du point M le long de l'axe (Ox), le biseau étant situé en x=0 et l'extrémité en x=L.

1. Puisqu'on parle de mise en vibration de l'air, quelle est la nature de l'onde générée dans la flute à bec ? Préciser alors les grandeurs physiques support de ce type d'onde. Donner un ordre de grandeur pour ces grandeurs physiques lors d'une conversation normale ainsi qu'un ordre de grandeur de c la célérité des ondes de ce type dans l'air.
2. Puisqu'on parle de nœuds de vibration, quelle est le type d'onde qui est générée dans la flute ? Justifier qu'on écrive l'onde sous la forme : $p(x,t) = p_O \cos(2\pi ft)\sin\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right)$. Préciser le lien entre f et λ.

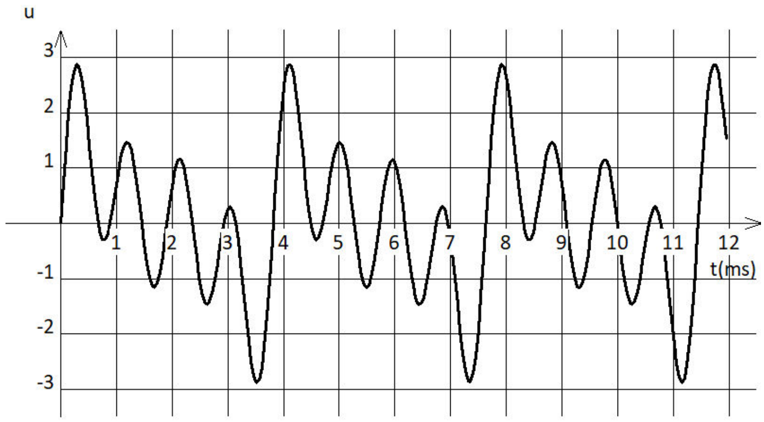
Lorsque tous les trous de la flute à bec sont fermés, il n'y a pas d'autres conditions imposées à la colonne d'air que les deux nœuds situés en x=0 et en x=L.

3. Montrer que la forme choisie pour exprimer l'amplitude de l'onde permet de vérifier la condition imposée sur la pression acoustique en x=0.
4. Montrer que la condition imposée en x=L sélectionne une famille de fréquences $f_k=k.f_1$, $k \in \mathbb{N}^*$, où on précisera l'expression de f_1 en fonction de L et c.
5. Représenter l'allure des modes propres de vibration de la colonne pour les modes de vibration 1 à 3 en faisant la représentation spatiale à différents instant. Préciser alors sur ces représentations, la position des nœuds et des ventres.

La note fondamentale de la flute à bec étudiée ici, est un Do(3) de fréquence fondamentale f_1(Do)=262Hz.

6. Déterminer la longueur L(Do) du tube d'air mis en vibration et faire l'application numérique.

Lorsqu'on souffle dans la flute à bec, on met en fait en vibration les modes propres de la colonne d'air, l'amplitude des différents modes allant en décroissant à partir du fondamental. On effectue alors l'enregistrement ci-contre à l'aide d'un micro.



7. Vérifier la correspondance entre cet enregistrement et la note Do(3) supposée être jouée sur la flute.
8. Donner l'allure du spectre associé à cet enregistrement en introduisant la notion de timbre de l'instrument.

La flute à bec est prédisposée à « octavier » c'est-à-dire à produire une note située une octave au-dessus de la note attendue lorsque le joueur souffle trop fort dans l'instrument.

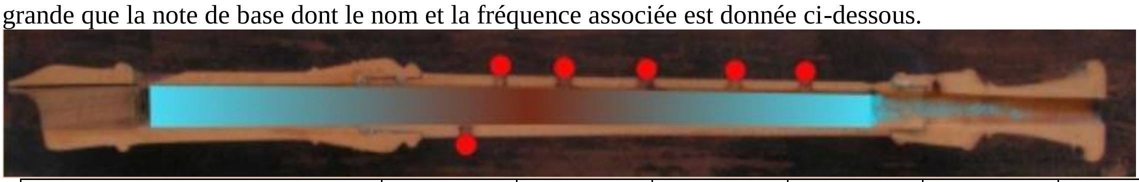
9. Expliquer pourquoi cette possibilité est ouverte dans un instrument comme la flute à bec.

Pour pallier à ce défaut, d'autres instruments, comme la clarinette sont conçus de manière à ce que les modes propres de vibration présentent un nœud de pression acoustique à l'embouchure et un ventre de pression acoustique à l'extrémité.

10. Etudier les modes propres de vibration d'une clarinette de longueur L', et montrer que la famille des fréquences sélectionnées s'écrit sous la forme $f'_k=(2k-1).f'_1$, $k \in \mathbb{N}^*$, où on précisera l'expression de f'_1 en fonction de L' et c.
11. Déterminer alors la longueur L' de la clarinette présentant comme note fondamentale le Ré(2) de fréquence fondamentale f'_1(Ré)=147Hz. Quelle serait la longueur d'une flute à bec présentant la même fréquence fondamentale ?
12. Expliquer pourquoi la clarinette ne peut à priori pas « octavier ».

On peut monter la note jouée sur la flute à bec d'un nombre n de demi-ton en multipliant la fréquence fondamentale de vibration de la colonne d'air par $2^{n/12}$.

En bouchant tous les trous situés de 0 à k_O où k_O va de 1 à 8, on réalise ce qu'on appelle un doigté simple sur la flute et on raccourcit la colonne d'air mise en vibration. On joue alors sur la flute une note de hauteur plus grande que la note de base dont le nom et la fréquence associée est donnée ci-dessous.



k_O	1	2	3	5	6	7
note	Si(3)	La(3)	Sol(3)	Mi(3)	Re(3)	Do(3)
Fréquence (Hz)	494	440	392	330	294	262
n (nombre de ½ tons)						
Longueur de la colonne (cm)						

13. Compléter le tableau précédent en précisant de combien de demi-ton on monte pour passer de Do(3) à la note jouée et la longueur de la colonne d'air mise en vibration.