Physique.

Problème 1 : Modes propres dans une fibre à saut d'indice.

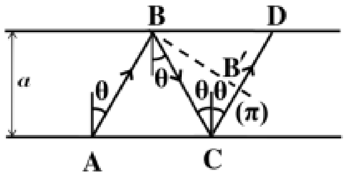
1. Pour que l'onde lumineuse soit guidée, il faut que la réflexion sur l'interface cœur-gaine soit totale.

La loi de Snell-Descartes sur la réfraction nous donne sur l'interface cœur-gaine : $n_1\sin(\theta)=n_2\sin(\theta')$

Puisque $n_1>n_2$, il existe un angle limite θ_l dans le cœur correspondant à un angle de $\pi/2$ dans la gaine ce qui donne : $n_1\sin(\theta)<n_1\sin(\theta_l)=n_2$. On obtient donc un rayon réfracté si $\theta<\theta_l=\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

On en déduit bien que l'onde est guidée par réflexion totale si $\boxed{\theta>\theta_l=\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}$ A.N : $\boxed{\theta_l=75°34'}$

2. A l'aide du dessin suivant :



On détermine que : $BC=\frac{a}{\cos\theta}$

La droite (BB') est perpendiculaire à (CD) et à (AB). L'angle entre (AB) et (BC) est de 2θ d'après la loi de Snell-Descartes sur la réflexion. On en déduit que l'angle entre (BC) et (BB') est $\pi/2-2\theta$.

Alors : $CB'=BC\sin\left(\pi/2-2\theta\right)=BC\cos(2\theta)$

D'où $(BB')=n_1\left[BC+CB'\right]=\frac{n_1 a}{\cos\theta}\left(1+\cos(2\theta)\right)$. Avec la relation $1+\cos(2\theta)=2\cos^2\theta$

On obtient $\boxed{(BCB')=2n_1 a\cos\theta}$ Puis on en déduit $\boxed{\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda_O}(BCB')=\frac{4\pi n_1 a}{\lambda_O}\cos\theta}$

3. On cherche à obtenir des interférences parfaitement constructives telles que : $\boxed{\Delta\varphi=2p\pi}$

On en déduit qu'il faut $\Delta\varphi=2p\pi=\frac{4\pi n_1 a}{\lambda_O}\cos\theta_p$ ce qui donne $\boxed{\cos\theta_p=p\frac{\lambda_O}{2n_1 a}}$

4. On sait qu'il faut respecter la condition $\theta_p\geq\theta_l$ ce qui entraine qu'il faut respecter $\cos\theta_p\leq\cos\theta_l$

On peut établir $\cos\theta_l=\sqrt{1-\sin^2\theta_l}=\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$ On en déduit que $p\leq\frac{2a}{\lambda_O}\sqrt{n_1^2-n_2^2}$

On en déduit donc $\boxed{p_{\max}=\left\lfloor\frac{2a}{\lambda_O}\sqrt{n_1^2-n_2^2}\right\rfloor}$ et puisque $p_{\min}=0$ on a $\boxed{N=\left\lfloor\frac{2a}{\lambda_O}\sqrt{n_1^2-n_2^2}\right\rfloor+1}$ A.N : $\boxed{N=49}$

5. Pour que l'onde soit transmise par la fibre, il faut toujours respecter $\cos\theta_p\leq\cos\theta_l$ ce qui se traduit par

$p\leq\frac{2a}{\lambda_O}\sqrt{n_1^2-n_2^2}$ et finalement par $p\leq\frac{2af}{c}\sqrt{n_1^2-n_2^2}$ où $\lambda_O=\frac{c}{f}$ soit au final $\boxed{f\geq p\frac{c}{2a\sqrt{n_1^2-n_2^2}}}$

La fibre est alors un filtre passe haut de fréquence de coupure $\boxed{f_p=p\frac{c}{2a\sqrt{n_1^2-n_2^2}}}$

6. Pour que la fibre soit monomode, il faut que $p_{max}=0$ ce qui implique $\frac{2a}{\lambda_O}\sqrt{n_1^2-n_2^2}<1$

Il faut donc que $a<\frac{\lambda_O}{2\sqrt{n_1^2-n_2^2}}$ A.N : $a<\frac{\lambda_O}{2\sqrt{n_1^2-n_2^2}}=2,06\mu m$

Problème 2 : mode propre de vibration d'une flute à bec.

1. L'onde générée dans le tube de la flute à bec est une onde sonore.

Les grandeurs physiques support de cette onde sont la surpression acoustique et la vitesse locale d'écoulement. La pression acoustique est de l'ordre de 0,2Pa, la vitesse d'écoulement locale est de l'ordre de $10^{-3}m.s^{-1}$ pour une discussion normale. La célérité des ondes sonores dans l'air est de l'ordre de $c=340m.s^{-1}$.

2. Les ondes caractérisées par la présence de nœuds et de ventres de vibration sont les ondes stationnaires. Dans l'expression proposée, on observe une séparation des variables temporelle et spatiale typique de ces ondes.

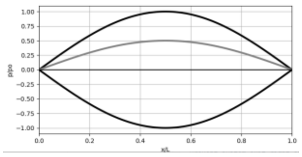
Le lien entre la longueur d'onde λ et la fréquence f est identique à celui pour les ondes progressives $\boxed{\lambda=cT=\frac{c}{f}}$

3. Le nœud en x=0 impose $p(0,t)=0$. L'expression proposée respecte cette condition car $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}0\right)=0$.

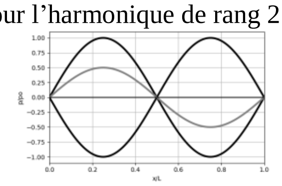
4. Le nœud en x=L, impose $p(L,t)=0$ alors $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}L\right)=0$ et les λ_k vérifient $\left(\frac{2\pi}{\lambda_k}L\right)=k\pi$

D'où les longueurs d'onde $\lambda_k=\left(\frac{2L}{k}\right)$ et les fréquences $f_k=\frac{c}{\lambda_k}$ exprimée par $\boxed{f_k=kf_1 \quad avec \quad f_1=\frac{c}{2L}}$

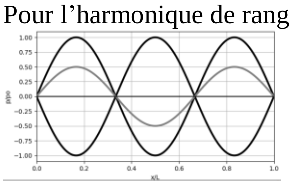
5. Pour fondamental.



Pour l'harmonique de rang 2 :



Pour l'harmonique de rang 3 :



6. La longueur du tube mis en vibration est $L(Do)=\frac{c}{2f_1(Do)}=6{,}5.10^{-1}m$

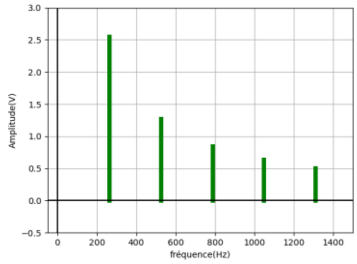
7. Si la note jouée est bien le Do(3) alors la fréquence fondamentale de l'enregistrement est f_1(Do3)=262Hz.

On mesure sur l'enregistrement trois périodes $3T=11{,}5ms$ ce qui donne une fréquence fondamentale $f=\frac{1}{T}=\frac{3}{11{,}5.10^{-3}}=261Hz$

Aux erreurs de mesures près, il y a bien correspondance entre cet enregistrement et la note Do(3) jouée sur l'instrument.

8. Le timbre est spécifique de chaque instrument, il est étudiable en observant le spectre du son joué.

Pour la flute à bec, on s'attend à un spectre présentant l'allure suivante.



9. On joue une note une octave au-dessus de la note attendue lorsqu'on multiplie par deux la fréquence fondamentale du spectre produit. Cette possibilité existe pour la flute à bec car l'harmonique de rang 2 fait partie des modes propres de vibration de la colonne d'air constituée dans cet instrument.

En soufflant trop fort, il semblerait donc qu'on déstabilise le fondamental et qu'on favorise la production d'une oscillation de la colonne d'air selon l'harmonique de rang 2 entrainant le phénomène « d'octaviation ».

10. Dans la clarinette, la condition imposée en x=0 par la présence d'un nœud permet de reprendre l'expression générale $p(x,t)=p_O\cos(2\pi ft)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$.

En revanche, la présence d'un ventre en x=L, impose une surpression d'amplitude maximale en x=L' ce qui se traduit par $\left|\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}L'\right)\right|=1$ Les solutions de cette équation sont du type $\frac{2\pi}{\lambda_k'}L'=-\frac{\pi}{2}+k\pi$ ce qui donne $\lambda_k'=\frac{4L'}{2k+1}$ et $\boxed{f_k'=(2k-1)f_1'}\boxed{k\in\mathbb{N}^*}$ où $\boxed{f_1'=\frac{c}{4L'}}$

11. Pour que la fréquence fondamentale soit un Ré(2) il faut que $\boxed{L'(\mathrm{Re})=\frac{c}{4f_1'(\mathrm{Re})}=58cm}$

Pour qu'un flute à bec permette de jouer cette même note, il faudrait qu'elle présente une longueur $\boxed{L'(\mathrm{Re})=\frac{c}{2f_1'(\mathrm{Re})}=1{,}16m}$ soit une longueur double de celle de la clarinette.

12. On a vu que la possibilité d'octavier était liée à la présence d'une harmonique de rang 2 dans le spectre du son produit avec un flute à bec. Cette harmonique est absente dans le spectre du son produit avec une clarinette et il semble donc logique qu'une clarinette ne permette pas d'octavier.

13. On détermine le nombre n de demi-ton en exploitant : $f_1(n)=f_1(Do).2^{n/12}$ d'où $\boxed{n=12\frac{\ln\left(\frac{f_1(n)}{f_1(Do)}\right)}{\ln 2}}$

Pour la longueur de la colonne d'air mise en vibration on sait que : $\boxed{L(n)=\frac{c}{2f_1(n)}}$

On exploite ces deux expressions pour tous les éléments du tableau :

k_O	1	2	3	5	6	7
note	Si(3)	La(3)	Sol(3)	Mi(3)	Re(3)	Do(3)
Fréquence (Hz)	494	440	392	330	294	262
n (nombre de ½ tons)	11	9	7	4	2	0
Longueur de la colonne (cm)	34,4	38,6	43,4	51,5	57,8	64,9