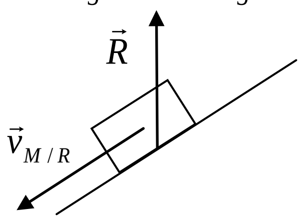
Approche énergétique du mouvement d'un point matériel.

1. Puissance et travail d'une force. Théorème de l'énergie cinétique.

1.1. Puissance d'une force dans un référentiel.

Définition : Soit une force $\vec{F}$ s'appliquant sur un point matériel M animé dans le référentiel d'étude R d'une vitesse $\vec{v}_{M/R}$. La puissance $P_{\vec{F};M/R}$ de la force s'exprime dans le référentiel R par : $P_{\vec{F};M/R} = \vec{F}.\vec{v}_{M/R}$.
La puissance s'exprime en W.

Exemple : On considère un pavé posé sur un plan incliné et glissant le long de ce plan.

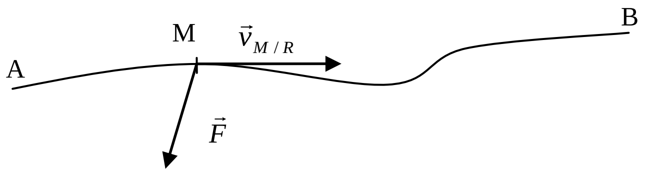


La puissance de la réaction s'exprime : $P_{\vec{R};M/R} = \vec{R}.\vec{v}_{M/R}$.
Pour un contact sans frottement, la composante tangentielle de la réaction est nulle, la puissance de la réaction est nulle $P_{\vec{R};M/R} = 0$
Sinon, la composante tangentielle est de sens opposé à la vitesse est alors $P_{\vec{R};M/R} < 0$

Propriétés : Une force est dite motrice lorsque sa puissance dans le référentiel d'étude est positive, elle est dite résistante lorsque sa puissance dans le référentiel d'étude est négative.

1.2. Travail d'une force dans un référentiel.

On considère un point matériel M qui suit une trajectoire (C) entre le point de départ A (instant t_A) et le point d'arrivée B (instant t_B).



Définition : Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ en M s'exprime : $\delta W = P_{\vec{F};M/R}.dt = \vec{F}.\vec{v}_{M/R}.dt = \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$. Le travail est homogène à une énergie, il s'exprime en Joule (J).

Remarque : $d\overrightarrow{OM}$ désigne le vecteur déplacement élémentaire du point matériel le long de la trajectoire.
On constate alors que le travail élémentaire est relié à la puissance par une intégration temporelle et qu'il est relié à la force elle-même par une intégration « le long de la trajectoire ».

Pour exprimer le travail d'une force, on a alors deux possibilités :

- Partir de l'expression de la puissance. Sommer les travaux élémentaires revient alors à intégrer en fonction du temps. $W_{A\to B} = \int \delta W = \int_{t_A}^{t_B} P_{\vec{F};M/R}.dt$.

Partir de la forme 'spatiale'. Sommer les travaux élémentaires revient alors à intégrer le long de la trajectoire.
$W_{A\to B} = \int \delta W = \int_{A\xrightarrow{(c)}B} \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$. Le travail d'une force $\vec{F}$ s'appliquant au point matériel M s'exprime comme la **circulation** de la force de A en B le long de la trajectoire (C).

Définition : On appelle circulation $C_{\vec{G},\Gamma}$ d'un champ vectoriel $\vec{G}\left(M,t\right)$ le long d'un parcours (Γ) la grandeur exprimée par : $C_{\vec{G},\Gamma} = \int_{A\xrightarrow{(\Gamma)}B} \vec{G}\left(M,t\right).d\overrightarrow{OM}$

Exemple : Prenons le cas d'une force constante $\vec{F}_C$. $W_{A\to B} = \vec{F}_C \int_{A\xrightarrow{(c)}B} .d\overrightarrow{OM} = \vec{F}_C.\overrightarrow{AB}$

Remarque : ***ATTENTION*** *: dans le cas général, le travail d'une force dépend de la trajectoire (C) décrite par le point matériel pour aller de A en B.*

1.3. Energie cinétique et lois d'évolution de l'énergie cinétique.

a. <u>Grandeur énergétique cinématique.</u>

<u>Définition</u> : Soit un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}_{M/R}$ dans le référentiel d'étude R. L'énergie cinétique de ce point matériel s'exprime : $E_{C;M/R} = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_{M/R}\|^2$

b. <u>Lien entre travail des forces et énergie cinétique.</u>

On part de l'écriture de la seconde loi de Newton pour un point matériel M de masse m dans le référentiel R supposé galiléen. On effectue alors un produit scalaire de chaque terme avec le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/R}$.

$$\left(\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R \vec{v}_{M/R} = \sum\left(\vec{F}_{\to M}.\vec{v}_{M/R}\right)$$

On sait de plus que : $\vec{p}_{M/R} = m\vec{v}_{M/R}$ on en conclut que : $\left(\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R \vec{v}_{M/R} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m(\vec{v}_{M/R})^2\right)$

On reconnait alors dans le terme de droite les puissances associées à chaque force : $\sum\left(\vec{F}_{\to M}.\vec{v}_{M/R}\right) = \sum P_{\vec{F}\to M}$

On obtient donc une première écriture : $\frac{d}{dt}\left(E_{C;M/R}\right) = \sum P_{\vec{F}\to M}$

On multiplie alors par une durée infinitésimale dt : $d\left(E_{C;M/R}\right) = \sum P_{\vec{F}\to M}.dt = \sum \delta W_{\vec{F}\to M}$

On obtient ainsi la seconde écriture : $d\left(E_{C;M/R}\right) = \sum \delta W_{\vec{F}\to M}$

En intégrant le long de la trajectoire (C) suivie par le point matériel entre les points A et B, on obtient alors la troisième écriture : $\left(E_C(B) - E_C(A)\right) = \sum W_{A\to B}$

c. <u>Enoncés des lois.</u>

Les lois d'évolution de l'énergie cinétique pour un point matériel découlent directement de la seconde loi de Newton, elles ne permettent donc pas d'obtenir des renseignements supplémentaires sur le système étudié. Cependant, l'approche énergétique s'avère parfois beaucoup plus intéressante à exploiter que l'approche dynamique pure.

<u>Loi de la puissance cinétique</u> : On étudie le mouvement d'un point M dans un référentiel galiléen. La loi de la puissance cinétique s'exprime alors sous la forme : $\boxed{\frac{d}{dt}\left(E_{C;M/R}\right) = \sum P_{\vec{F}\to M}}$

<u>Loi de l'énergie cinétique</u> : On considère un point matériel M qui se déplace dans le référentiel R supposé galiléen le long d'une trajectoire (C) entre les points A et B.

La variation de l'énergie cinétique lors d'un petit déplacement le long de la trajectoire (C) est donnée par l'écriture locale de la loi de l'énergie cinétique : $\boxed{d\left(E_{C;M/R}\right) = \sum \delta W_{\vec{F}\to M}}$

La variation totale de l'énergie cinétique entre les points A et B est donnée par l'écriture intégrale de la loi de l'énergie cinétique : $\boxed{\left(E_C(B) - E_C(A)\right) = \sum W_{A\to B}}$

1.4. Exemple d'application de la loi de l'énergie cinétique.

On considère une moto lancée sur une route supposée horizontale à la vitesse initiale v_O. Elle freine alors avec une force résistante constante de norme F. On souhaite déterminer la distance d parcourue par la moto avant son arrêt total.

- On travaille avec une base de projection cartésienne telle que la vitesse s'exprime $\vec{v}_O = v_O\vec{e}_x$.
- La force résistante $\vec{F}$ s'exprime alors : $\vec{F} = -F.\vec{e}_x$ On en déduit l'expression de son travail élémentaire $\delta W_{\vec{F}} = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = -F.dx$ puis de son travail total $W_{\vec{F}} = -F.d$
- Le poids est vertical perpendiculaire à la vitesse, son travail est donc nul.
- Les roues roulent sans glisser sur la route, le travail des réactions de la route sur les roues est donc nul.
- On applique la loi de l'énergie cinétique : $E_{C,finale} - E_{C,initiale} = -Fd$. On obtient alors : $d = \frac{mv_O^2}{2F}$

L'utilisation de la loi de l'énergie cinétique permet de déterminer la distance d'arrêt d uniquement à partir de la connaissance de l'état initial et de l'état final du système étudié sans se soucier du détail de l'évolution temporelle de sa vitesse ou de sa position.

2. Champ de force conservatif et Energie potentielle.

2.1. Premier exemple, la force de gravité à la surface de la Terre.

On considère la force de pesanteur exercée sur un point matériel de masse m dans un champ de pesanteur uniforme caractérisé par le vecteur accélération de pesanteur $\vec{g}$. $\vec{P} = m\vec{g}$

Le travail élémentaire de cette force s'exprime : $\delta W_{\vec{P}} = m\vec{g}.d\overrightarrow{OM}$.

On note $(\vec{e}_z)$ le vecteur unitaire vertical vers le haut alors : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$; $d\overrightarrow{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$

Et le travail élémentaire de la force de gravité s'écrit : $\delta W_{\vec{P}} = -mg.dz = -d(mgz)$

Lorsqu'on exprime le travail de la force entre deux points A et B le long d'une trajectoire (C), on obtient : $W_{\vec{P};A\to B} = mgz_A - mgz_B$

<u>Conclusion</u> :

- Le travail élémentaire de la force de pesanteur s'exprime comme la variation élémentaire d'une fonction de la seule position du point matériel M.
- Le travail de la force de pesanteur entre le point A et le point B ne dépend plus de la trajectoire pour aller de A en B mais seulement des positions des points extrêmes.

On introduit alors l'énergie potentielle de pesanteur : $E_{P,\vec{g}}(M) = mgz + C$ Où C est une constante à établir en fonction des conditions imposées ou choisies dans le problème étudié.

Le travail élémentaire de la force de gravité s'exprime alors : $\delta W_{\vec{P}} = -d\left(E_{P,\vec{g}}(M)\right)$

Le travail de la force de gravité entre un point A et un point B s'exprime alors : $W_{\vec{P};A\to B} = E_{P,\vec{g}}(A) - E_{P,\vec{g}}(B)$

La force de pesanteur dérive alors de l'énergie potentielle et s'exprime : $\vec{P} = -\dfrac{dE_P}{dz}(z)\vec{e}_z$

2.2. Deuxième exemple, la force de rappel élastique.

On considère un point matériel M de masse m relié à un point fixe O par un ressort de longueur à vide l_O et de raideur k.

La position de M est exprimée par : $\overrightarrow{OM} = l\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire et l la longueur du ressort.

La force exercée par le ressort sur le point matériel s'exprime : $\vec{F}_{el} = -k(l - l_O)\vec{u}$

Le travail élémentaire de la force s'exprime alors : $\delta W_{el} = -k(l - l_O)\vec{u}.d(l\vec{u})$

$\vec{u}d(l\vec{u}) = dl + l.\vec{u}d(\vec{u})$ comme on l'a déjà vu pour un vecteur unitaire $\vec{u}d(\vec{u}) = \dfrac{1}{2}d\left(\vec{u}^2\right) = 0$

On en conclut donc que : $\delta W_{el} = -k(l - l_O)dl = -k(l - l_O)d(l - l_O) = -d\left(\dfrac{1}{2}k(l - l_O)^2\right)$

Lorsqu'on exprime alors le travail de la force entre deux points A et B le long d'une trajectoire (C), on obtient : $W_{el;A\to B} = \dfrac{1}{2}k(l_A - l_O)^2 - \dfrac{1}{2}k(l_B - l_O)^2$

<u>Conclusion</u> :

- Le travail élémentaire de la force de rappel élastique s'exprime comme la variation élémentaire d'une fonction de la seule position du point matériel M.
- Le travail de la force de rappel élastique entre le point A et le point B ne dépend plus de la trajectoire pour aller de A en B mais seulement des positions des points extrêmes.

On introduit alors l'énergie potentielle élastique : $E_{P,el}(M) = \dfrac{1}{2}k(l - l_O)^2$

Le travail élémentaire de la force élastique s'exprime alors : $\delta W_{el} = -d\left(E_{P,el}(M)\right)$

Le travail de la force élastique entre un point A et un point B s'exprime alors : $W_{el;A\to B} = E_{P,el}(A) - E_{P,el}(B)$

La force de rappel élastique dérive de l'énergie potentielle et s'exprime : $\vec{F}_{el} = -\dfrac{dE_{P,el}}{dl}(l).\vec{u}$

<u>Remarque</u> : Cette énergie potentielle est également définie à une constante près, on a fixé ici la constante à zéro lorsque le ressort est au repos ($l=l_O$) ce qui est la convention généralement adoptée pour ce type de système.

2.3. Troisième exemple, les forces centrales Newtoniennes.

a. Définition des forces centrales, et centrales Newtoniennes.

Une force est dite centrale si elle est toujours dirigée vers le même point nommé alors centre de la force généralement pris comme origine du repère spatial.
Parmi ces forces centrales, on distingue les forces centrales newtoniennes pour lesquelles le vecteur position par rapport au centre de force O s'exprime $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}$ et le vecteur force s'exprime $\vec{F}_N = \frac{k}{r^2}\vec{u}$.

Parmi les forces fondamentales, on peut distinguer deux forces qui sont de nature centrale et newtonienne :

- La force gravitationnelle exercée par un système de masse m_A qu'on attribue entièrement à un point A pris comme centre de la force sur un point matériel M de masse m.

La force gravitationnelle s'exprime alors : $\vec{F}_{G,A\to M} = -\frac{Gm_A m}{r^2}\vec{u}$

où $G = 6{,}67.10^{-11}\,N.m^2.kg^{-2}$ est la constante de gravitation universelle et $\overrightarrow{AM} = r\vec{u}$

- La force coulombienne exercée par un système de charge totale q_A qu'on attribue à un point A pris comme centre de la force sur un point matériel M portant une charge q.

La force coulombienne s'exprime alors : $\vec{F}_{C,A\to M} = \frac{q_A q}{4\pi\varepsilon_O r^2}\vec{u}$

où $\varepsilon_O = \frac{1}{36\pi.10^9}\,F.m^{-1}$ est la permittivité absolue du vide et $\overrightarrow{AM} = r\vec{u}$

b. Energie potentielle asociée.

On reprend la démarche pour déterminer l'énergie potentielle associée à une force centrale newtonienne :

- Le travail élémentaire de la force s'exprime : $\delta W_N = \frac{k}{r^2}\vec{u}.d(r\vec{u})$

On peut toujours exprimer : $\vec{u}d(r\vec{u}) = dr + r.\vec{u}d(\vec{u}) = dr$ et alors $\delta W_N = \frac{k}{r^2}dr = -d\left(\frac{k}{r}\right)$

Conclusion :

- Le travail élémentaire de la force de rappel élastique s'exprime comme la variation élémentaire d'une fonction de la seule position du point matériel M.
- Le travail de la force de rappel élastique entre le point A et le point B ne dépend plus de la trajectoire pour aller de A en B mais seulement des positions des points extrêmes.

On introduit alors l'énergie potentielle associée à la force centrale newtonienne : $E_{P,N}(M) = \frac{k}{r}$

Le travail élémentaire de la force centrale newtonienne s'exprime alors : $\delta W_N = -d\left(E_{P,N}(M)\right)$

Le travail de la force centrale newtonienne entre un point A et un point B s'exprime : $W_{N;A\to B} = E_{P,N}(A) - E_{P,el}(B)$

La force centrale newtonienne dérive alors de l'énergie potentielle et s'exprime : $\vec{F}_N = -\frac{dE_{P,N}}{dr}(r).\vec{u}$

<u>Remarque</u> : Cette énergie potentielle est également définie à une constante près, on a fixé ici la constante à zéro lorsque la distance r→∞ ce qui est la convention généralement adoptée pour ce type de système.

2.4. Généralisation du lien entre force conservative et énergie potentielle.

a. Enoncé des propriétés des forces conservatives.

Définition : Une force $\vec{F}$ est dite conservative si elle dérive d'une fonction scalaire du seul vecteur position que l'on nomme alors énergie potentielle $E_{P,\vec{F}}$.

Propriété : Le travail élémentaire de la force $\delta W_{\vec{F}}$ s'exprimera alors par la relation : $\delta W_{\vec{F}} = -d\left(E_{P,\vec{F}}(M)\right)$

Le travail de la force pour aller de A en B ne dépend plus de la trajectoire mais uniquement des points de départ et d'arrivée : $W_{\vec{F};A\to B} = E_{P,\vec{F}}(A) - E_{P,\vec{F}}(B)$

La force s'exprime de manière générale sous la forme : $\vec{F} = -gr\vec{a}d\left(E_P\right)(M)$

L'opérateur employé est nommé gradient et son introduction complète est l'objet d'un polycopié…

b. Retour sur le premier exemple.

Pour la force de gravité à la surface de la Terre, on se place en coordonnées cartésiennes et le gradient s'exprime $\overrightarrow{grad}\left(E_P(M)\right) = \frac{\partial E_P}{\partial x}(M)\vec{e}_x + \frac{\partial E_P}{\partial y}(M)\vec{e}_y + \frac{\partial E_P}{\partial z}(M)\vec{e}_z$ où $E_P(M) = mgz$.

L'énergie potentielle ne dépend que de z alors le gradient s'exprime : $\overrightarrow{grad}\left(E_P(M)\right)=\dfrac{dE_P}{dz}(M)\vec{e}_z$

Finalement $\vec{P}=-\dfrac{dE_P}{dz}(z)\vec{e}_z=-mg\vec{e}_z$

c. <u>Retour sur le troisième exemple.</u>

Pour la force Newtonienne s'exerçant par exemple sur une planète, on se place en coordonnées cylindro-polaires car on sait que le mouvement est plan, et qu'on repère alors la position du point matériel par les coordonnées polaires (r,θ) dans ce plan : $\overrightarrow{grad}\left(E_P(M)\right)=\dfrac{\partial E_P}{\partial r}(M)\vec{e}_r+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_P}{\partial \theta}(M)\vec{e}_\theta+\dfrac{\partial E_P}{\partial z}(M)\vec{e}_z$ où $E_P(M)=\dfrac{k}{r}$.

L'énergie potentielle ne dépend que de r, on en déduit que $\overrightarrow{grad}\left(E_P(M)\right)=\dfrac{dE_P}{dr}(M)\vec{e}_r$

Finalement $\vec{F}=-\dfrac{dE_P}{dr}(r)\vec{e}_r=\dfrac{k}{r^2}\vec{e}_r$

d. <u>Etude d'un exemple supplémentaire : le piège de Penning.</u>

Dans le piège de Penning, des électrodes créent un potentiel électrostatique exprimé dans la base de projection cartésienne d'origine O le centre du piège par $V(M)=\dfrac{V_O}{2d^2}\left(x^2+y^2-2z^2\right)$.

Une particule de charge q est alors soumise à une force électrostatique qui dérive de l'énergie potentielle $E_P(M)=\dfrac{qV_O}{2d^2}\left(x^2+y^2-2z^2\right)$

Le gradient associé s'exprime

$$\overrightarrow{grad}\left(E_P(M)\right)=\frac{\partial E_P}{\partial x}(M)\vec{e}_x+\frac{\partial E_P}{\partial y}(M)\vec{e}_y+\frac{\partial E_P}{\partial z}(M)\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{grad}\left(E_P(M)\right)=\frac{qV_O}{d^2}x\vec{e}_x+\frac{qV_O}{d^2}y\vec{e}_y-2\frac{qV_O}{d^2}z\vec{e}_z$$

La force qui en dérive s'exprime : $\vec{F}(M)=-\dfrac{qV_O}{d^2}x\vec{e}_x-\dfrac{qV_O}{d^2}y\vec{e}_y+2\dfrac{qV_O}{d^2}z\vec{e}_z$

C'est une force élastique attractive vers O dans les directions (Ox) et (Oy) et une force répulsive dans la direction (Oz).

3. Etude des systèmes conservatifs à un degré de liberté.

3.1. Introduction de l'énergie mécanique et des systèmes conservatifs.

Reprenons la loi de l'énergie cinétique et écrivons sa forme locale : $d\left(E_{C;M/R}\right)=\sum \delta W_{\to M}$

Distinguons alors les forces conservatives et les forces non conservatives, et réécrivons ce théorème.

$d\left(E_{C;M/R}\right)=\delta W_{N.C.\to M}+\delta W_{C\to M}$ soit $d\left(E_{C;M/R}\right)=\delta W_{N.C.\to M}-d\left(E_{P;M}\right)$

Finalement, on obtient la forme suivante : $d\left(E_{C;M/R}+E_{P;M}\right)=\delta W_{N.C.\to M}$

On voit ainsi apparaître une nouvelle énergie caractéristique du point matériel M considéré dans le problème. Cette énergie est la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles associées aux forces conservatives dans le problème étudié.

<u>Définition</u> : Dans un problème où on considère un point matériel M soumis (entre autres) à des forces conservatives, on définit l'énergie mécanique du point matériel comme la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles associées aux forces conservatives. $\boxed{E_M=E_{C;M/R}+E_{P;M}}$

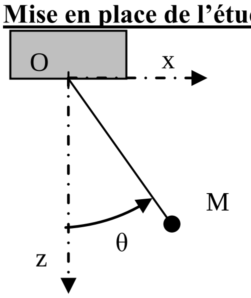
<u>Enoncé</u> : La loi de l'énergie cinétique se réexprime alors en fonction de l'énergie mécanique de la manière suivante. Les variations de l'énergie mécanique d'un point matériel sont données par le travail des forces Non Conservatives s'appliquant à ce point matériel : $\boxed{d\left(E_M\right)=\delta W_{N.C.\to M}}$

<u>Définition et caractérisation</u> : Un point matériel suit une évolution conservative dans un référentiel R (on dit souvent que le système est conservatif), si son énergie mécanique est une constante. On dit encore que son énergie mécanique est une **<u>intégrale première du mouvement</u>**. Et alors $\boxed{d\left(E_M\right)=0}$

!!!!!!!Remarque très importante : pour qu'un système soit conservatif, il suffit que le travail des forces non conservatives sur le point matériel soit nul !!!!!!!

3.2. Etude énergétique du pendule simple.

a. Mise en place de l'étude.



On considère un pendule constitué d'un point matériel M de masse m relié à un point O fixe par une tige rigide de masse négligeable et inextensible de longueur l.
Les forces qui s'exercent sur le point matériel sont :
Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$
La tension du fil : $\vec{T}$

Pour décrire l'évolution de ce système, on n'a besoin de déterminer celle d'un seul paramètre qui est l'angle θ. On se trouve donc dans le **cas d'un système à un degré de liberté**. Pour ce type de système, il est souvent judicieux d'effectuer l'étude du mouvement par des raisonnements énergétiques.

- La vitesse du point M s'exprime : $\vec{v}_{M/R} = l\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$. L'énergie cinétique s'exprime : $E_C = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$
- La tension du fil est une force non conservative mais elle est orientée selon $\vec{e}_r$, **elle ne travaillera donc pas**.
- Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ est une force conservative associée à une énergie potentielle

Option 1, on la recalcule $\delta W_P = \vec{P}.d\overrightarrow{OM}$ avec $\vec{P} = mg.\vec{e}_z$ et $d\overrightarrow{OM} = ld\theta.\vec{e}_\theta$ d'où $\delta W_P = \vec{P}.d\overrightarrow{OM} = mg.\vec{e}_z.ld\theta.\vec{e}_\theta = -mgl\sin\theta d\theta$

L'énergie potentielle de pesanteur s'exprime donc, en fixant l'origine des énergies potentielles en θ=0 par la relation : $E_P = mgl(1-\cos\theta)$.

Option 2, on utilise l'expression connue $E_P = -mgz + C$, on traduit $z = l\cos\theta$ et on fixe la constante en prenant une énergie potentielle nulle en θ=0 et alors $E_P = mgl(1-\cos\theta)$

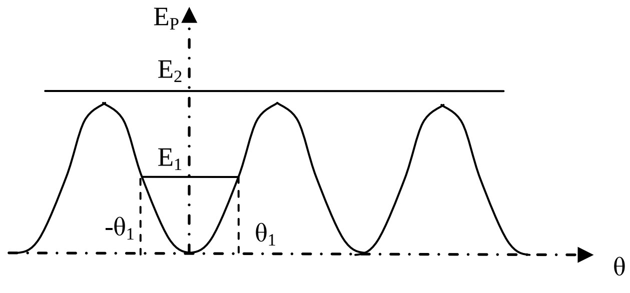
b. Obtention de l'équation du mouvement.

Pour un système conservatif à un degré de liberté, ici il s'agit de l'angle θ, on peut obtenir l'équation du mouvement en exploitant la conservation de l'énergie mécanique au cours du temps :

- L'énergie mécanique s'exprime : $E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta)$
- Cette grandeur est conservée, sa dérivée par rapport au temps est donc nulle : $\frac{d}{dt}(E_M) = 0$
- On obtient $ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl(\dot{\theta}\sin\theta) = 0$ puis l'équation du mouvement : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$

c. Exploitation de l'énergie potentielle, état du système et positions d'équilibre.

On trace l'énergie potentielle en fonction du paramètre spatial θ.
On étudie alors l'énergie mécanique du point matériel. C'est une grandeur conservée, elle gardera toujours la même valeur qu'à l'instant initial.



- Si on considère un point matériel lâché avec une énergie mécanique E_1 à l'instant initial, il pourra donc se déplacer sur l'intervalle $[-\theta_1;\theta_1]$ mais ne pourra pas en sortir. On constate donc dans ce cas que l'amplitude du mouvement sera finie. Le mouvement du pendule sera oscillatoire entre les valeurs extrêmes $-\theta_1$ et θ_1. On dit qu'on observe alors un état lié, le système ne peut pas quitter le puit de potentiel dans lequel il est piégé.
- Si on considère un point matériel lâché avec une énergie mécanique E_2 à l'instant initial, il pourra se déplacer et atteindre n'importe quelle valeur d'angle. Le pendule décrira alors des rotations autour du point O et son amplitude tendra vers $\pm\infty$. On dit alors qu'on observe un état de diffusion, le système peut quitter le voisinage de son point de départ.

Sur cette illustration, on constate également que :

- L’énergie potentielle passe par des minima en $\theta_n = 2n\pi$. Ces points correspondent également aux positions d’équilibre stables du pendule
- L’énergie potentielle passe par des maxima en $\theta'_n = (2n+1)\pi$ qui correspondent aussi à des positions d’équilibre instables du pendule.

d. Linéarisation du mouvement autour d’une position d’équilibre.

L’équation du mouvement pour le pendule simple s’écrit sous la forme : $\ddot{\theta} + \omega_O^2(\sin\theta) = 0$ avec $\omega_O = \sqrt{\frac{g}{l}}$

La position $\theta_O = 0$ est identifiée comme une position d’équilibre. On peut alors étudier le mouvement de faible amplitude autour de cette position : $\theta = \theta_O + \delta\theta = \delta\theta$

On effectue une approximation linéaire de l’équation différentielle : $\ddot{\theta} \to \delta\ddot{\theta}$; $(\sin\theta) \to \delta\theta$

On obtient alors l’équation du mouvement de l’oscillateur harmonique libre : $\delta\ddot{\theta} + \omega_O^2\delta\theta = 0$

Le petit mouvement du pendule autour de la position d’équilibre stable est alors constitués d’oscillation sinusoïdales de pulsation $\omega_O = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et de période $T = \frac{2\pi}{\omega_O} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

3.3. Résumé des méthodes.

a. Obtention de l’équation du mouvement.

Pour un système conservatif à un degré de liberté, on peut obtenir l’équation du mouvement en exploitant la conservation de l’énergie mécanique au cours du temps.

- On exprime l’énergie mécanique du système qui est conservée c’est-à-dire constante dans le temps lors de l’évolution du système.
- On traduit donc cette propriété en affirmant que la dérivée par rapport au temps de l’énergie mécanique est nulle. : $\frac{dE_M}{dt} = 0$
- On en déduit l’équation du mouvement du point matériel.

b. Etudes des positions d’équilibre.

En étudiant l’énergie potentielle, on peut déterminer les positions d’équilibre du point matériel étudié ainsi que leur nature stable ou instable. Soit un système conservatif pour lequel l’énergie potentielle E_P du point matériel étudié dépend du seul paramètre x.

- Les positions d’équilibre x_e sont les extrema de l’énergie potentielle : $\frac{dE_P}{dx}(x_e) = 0$
- Les positions d’équilibre stables sont des minima de l’énergie potentielle : $\frac{d^2E_P}{dx^2}(x_e) > 0$

c. Petites oscillations autour d’une position d’équilibre stable.

Autour d’une position d’équilibre stable, on peut étudier les oscillations de petite amplitude du point matériel en linéarisant l’équation du mouvement autour de cette position d’équilibre stable.

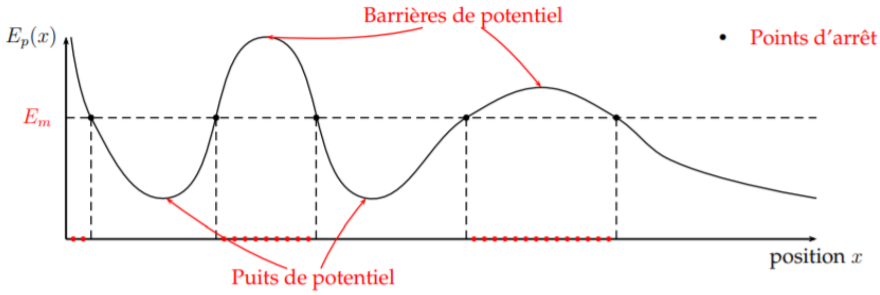
- L’équation du mouvement s’écrit sous la forme : $\ddot{x} + f(x) = 0$
- On identifie x_O comme une position d’équilibre. On pose $x = x_O + \delta x$ avec δx petit.
- On identifie alors f(x) avec l’équation de la droite tangente en x_O : $f(x) = f(x_O) + \frac{df}{dx}(x_O).\delta x$.
- On sait que x_O est une position d’équilibre, $f(x_O) = 0$ et l’équation devient $\delta\ddot{x} + \frac{df}{dx}(x_O).\delta x = 0$

<u>Remarque 1</u> : En terme mathématique, on dit qu’on effectue le Développement limité à l’ordre 1 (DL1) de l’équation du mouvement de départ autour de la position d’équilibre considérée.

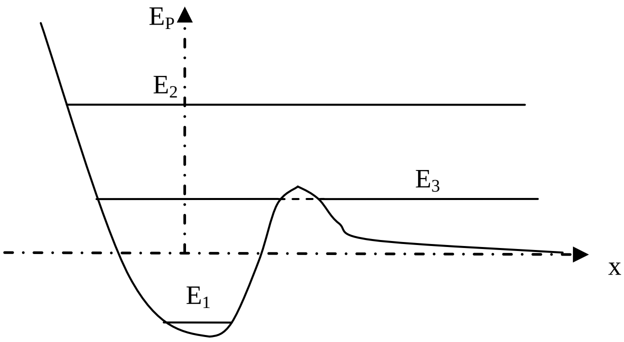
<u>Remarque 2</u> : On constate que quel que soit le problème conservatif traité, si on met en évidence une position d’équilibre, les petits mouvements autour de cette position d’équilibre vérifieront toujours l’équation du mouvement de l’O.H. Ce dernier apparaît donc comme le cas limite des oscillations de n’importe quel système dès lors qu’on s’intéresse à de petits mouvements autour d’une position d’équilibre stable.

d. Nature des trajectoires, état du système.

Lorsqu’on trace la courbe de l’énergie potentielle en fonction du seul paramètre spatial dont elle dépend pour un système conservatif, on peut déduire de son allure la nature des trajectoires possibles pour un point matériel en fonction de son énergie mécanique.



- Pour un point matériel d'énergie mécanique E_m, on désigne alors par le vocabulaire suivant les différentes zones du champ énergétique :
  - On désigne par le terme de puit de potentiel les zones où l'énergie potentielle est inférieure à l'énergie mécanique du système. Un point d'énergie E_m est alors susceptible d'explorer ce puit de potentiel sur une extension limité par les points d'arrêt en lesquels son énergie cinétique est nécessairement nulle.
  - On désigne par le terme de barrière de potentiel les zones où l'énergie potentielle est supérieure à l'énergie mécanique du point matériel. Ces zones ne peuvent pas être explorées par le point matériel.



- L'énergie mécanique E_1 correspond à un point matériel dont le domaine d'évolution est borné, on parlera dans ce cas d'un état lié.
- E_2 correspond à un point matériel dont le domaine d'évolution n'est pas borné, on parlera dans ce cas d'un état de diffusion.
- E_3 peut correspondre à un état lié ou de diffusion selon les conditions initiales.

<u>Remarque 2 :</u> En mécanique classique, il est impossible qu'une particule passe d'un état lié à un état de diffusion est inversement. En mécanique quantique, on montre que ce n'est plus le cas, il existe une probabilité pour une particule dans un état lié de franchir le gap d'énergie vers un état de diffusion par effet tunnel.

Capacités exigibles

- Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force
- Définir et calculer la puissance et le travail d'une force
- Distinguer force conservative et force non-conservative
- Savoir établir et exploiter les expressions des énergies potentielles de pesanteur, élastique et Newtonnienne.
- Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique et utiliser les conditions initiales pour la déterminer
- Établir l'équation d'un mouvement conservatif à partir de l'énergie.
- Déduire d'une courbe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre et leur stabilité.
- Déduire d'une courbe d'énergie potentielle le comportement qualitatif d'un système dont on connaît l'énergie mécanique : état lié ou de diffusion, éventuel mouvement périodique.
- Exploiter qualitativement le lien entre le profil d'énergie potentielle et le portrait de phase.
- Approximer un puits de potentiel quelconque par un puits harmonique au voisinage d'une position d'équilibre stable. Identifier cette situation au modèle de l'oscillateur harmonique