

Mouvement d'une particule chargée dans des champs électrique et magnétique uniformes et stationnaires.

1. Force de Lorentz sur une charge ponctuelle.

1.1. Expression de la force.

Définition : La force \vec{F}_L exercée sur un point matériel M portant la charge électrique q et de vitesse $\vec{v}_{M/R}$ dans le référentiel d'étude lorsque règnent un champ électrostatique \vec{E}_O et un champ magnétostatique \vec{B}_O est donnée par la relation suivante appelée force de Lorentz : $\vec{F}_L = q(\vec{E}_O + \vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_O)$

Remarque : Cette expression de la force électromagnétique sur une particule chargée est vraie dans le cas général. Les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ peuvent être variables dans l'espace et dans le temps, l'expression de la force de Lorentz restera la même : $\vec{F}_L = q(\vec{E}(M,t) + \vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}(M,t))$

1.2. La composante électrostatique est conservative.

a. Etude du cas du champ électrostatique uniforme.

On reste dans le cadre du programme, on suppose que le champ électrostatique est constant : $\vec{E} = E_O \cdot \vec{e}_x$.
Ce champ étant constant, on met en évidence un potentiel électrostatique $V(x) = -E_O \cdot x + cste$ dont dérive le champ électrostatique $\vec{E} = -\text{grad}(V(M)) = -\frac{dV}{dx}(M) \cdot \vec{e}_x = E_O \vec{e}_x$.

La force électrostatique $\vec{F}_E = qE_O \cdot \vec{e}_x$ exercée par ce champ électrostatique uniforme sur une particule de charge électrique q est conservative, on lui associe l'énergie potentielle : $E_{p,\vec{E}} = qV(x) = -qE_O x + cste$.

b. Généralisation pour tous les champs électrostatiques.

L'existence d'un potentiel électrostatique V(M) dont dérive le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est démontrée dans le cas général. (**Attention, il faut tout de même vérifier l'hypothèse de régime stationnaire**).

Dans le cas général, on peut alors introduire le potentiel électrostatique V(M) qui vérifie les propriétés (équivalentes entre elles) suivantes :

$$dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} \quad V(A) - V(B) = \int_{A \rightarrow B} \vec{E}(M) d\vec{l}(M) \quad \vec{E}(M) = -\text{grad}(V(M))$$

Conclusion à retenir

- La force exercée sur une particule de charge q par le champ électrostatique $\vec{F}_L = q\vec{E}(M)$ est conservative.
- l'énergie potentielle associée s'exprime alors en fonction du potentiel électrostatique : $E_p(M) = qV(M)$
- Le lien entre champ $\vec{E}(M)$ et le potentiel V(M) est le même que le lien entre la force conservative et l'énergie potentielle dont elle dérive, il s'écrit sous les trois formes équivalentes suivantes

$$dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} ; \quad V(A) - V(B) = \int_{A \rightarrow B} \vec{E}(M) d\vec{l}(M) ; \quad \vec{E}(M) = -\text{grad}(V(M))$$

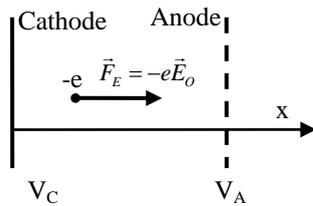
Ce potentiel électrostatique est celui qu'on manipule en électrocinétique, ce qui permet d'expliquer que dans un circuit composé de fils métalliques, les électrons sont mis en mouvement par la force électrostatique. La différence de potentiel imposée par le générateur entraîne la création d'un champ électrique dans les fils qui met en mouvement les charges.

1.3. Bilan d'énergie mécanique pour une particule chargée.

a. Exemple du canon à électron.

On considère un électron de charge $-e$ avec $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ de masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{kg}$, plongé dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}_O = E_O \vec{e}_x$. On mesure à la sortie du système d'électrodes accélératrices, appelé canon à électrons une vitesse $v_O = 2,5 \cdot 10^7 \text{m.s}^{-1}$.

On cherche à déterminer la valeur de la tension à appliquer entre les électrodes pour obtenir cette vitesse à la sortie du canon.



On souhaite qu'un électron produit par arrachement thermique au niveau de la cathode soit accéléré par la force électrostatique de Lorentz et atteigne la vitesse $\vec{v}_O = v_O \vec{e}_x$ en sortant du système au niveau de l'anode.

Il faut donc que $\vec{E}_O = E_O \vec{e}_x$ avec $E_O < 0$, et donc $\frac{dV}{dx} = -E_O > 0$ on en conclut que $V_A > V_C$.

Bilan des forces :

- La force électrostatique $\vec{F}_{L,\vec{E}}(M) = q\vec{E}_O = (-e)\vec{E}_O$ qui est conservative associée à l'énergie potentielle $E_{P,e}(M) = qV(M) = (-e)V(M)$
- La force de gravité dont on va montrer par la suite qu'elle est négligeable dans cette étude.

L'énergie mécanique de l'électron s'exprime par : $E_M = \frac{1}{2} m \vec{v}_{M/R}^2 + qV(M)$

La conservation de l'énergie mécanique entre l'état initial où il est arraché à la cathode sans vitesse initiale et l'état final où il passe au niveau de l'anode à la vitesse $\vec{v}_O = v_O \vec{e}_x$ s'écrit : $E_{M,C} = E_{M,A}$

ce qui donne $(0 + (-e)V_C)_{Cathode} = \left(\frac{1}{2} m v_O^2 + (-e)V_A \right)_{Anode}$

On obtient finalement : $U_{AC} = V_A - V_C = \frac{m}{2e} v_O^2 = 1,8 \cdot 10^3 V$

Pour communiquer la vitesse $v_O \approx c/10$ à l'électron, il faut appliquer entre l'anode et la cathode une tension de l'ordre de 1kV.

Vérifions maintenant que l'hypothèse d'une force de gravité négligeable est valable :

- $\|\vec{P}\| = m_e g = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9,81 \approx 10^{-29} N$ et $\|\vec{F}_{L,\vec{E}}\| = e E_O = \frac{e U_{AC}}{d} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{1,810^3}{10^{-2}} \approx 10^{-14} N$.

En effet $V_A - V_C = \int_{A \rightarrow C} \vec{E}(M) d\vec{l}(M) = \int_d^0 -E_O dx = E_O d$

- L'hypothèse est largement vérifiée.

b. Généralisation.

Lorsqu'on considère une particule portant une charge q , plongée dans un champ électrostatique associé à un potentiel électrostatique $V(M)$, on peut :

- Négliger la force de gravitation sur cette particule.
- Utiliser le caractère conservatif de la force électrostatique et en déduire la conservation de l'énergie mécanique du système qui s'écrit : $E_M = \frac{1}{2} m \vec{v}_{M/R}^2 + qV(M)$

Entre deux états (position en A, vitesse v_A) (position en B, vitesse v_B) on peut faire le bilan d'énergie suivant : $E_C(B) = E_C(A) + q \cdot (V(A) - V(B))$ $E_C(B) = E_C(A) + q \cdot U_{AB}$.

Conclusion : le champ électrostatique est susceptible de modifier l'énergie cinétique d'une particule chargée.

1.4. Etude de la composante magnétique.

On considère une particule de charge q , de masse m plongée dans un champ magnétostatique uniforme.

Elle est donc soumise aux forces suivantes :

- La composante magnétique de la force de Lorentz s'exprime : $\vec{F}_L = q \vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_O(M, t)$.
- La force de gravité $\vec{P} = m_e \vec{g}$

On peut d'abord faire la comparaison de ces deux forces :

- $\|\vec{P}\| = m_e g = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9,81 \approx 10^{-29} N$ et $\|\vec{F}_L\| \approx (10^{-19}) \cdot (10^7) (10^{-2} - 10^0) \approx 10^{-14} - 10^{-12} N$
- La force de gravité sera négligeable dans ces études.

On peut également étudier l'influence de la force magnétostatique sur la vitesse de la particule :

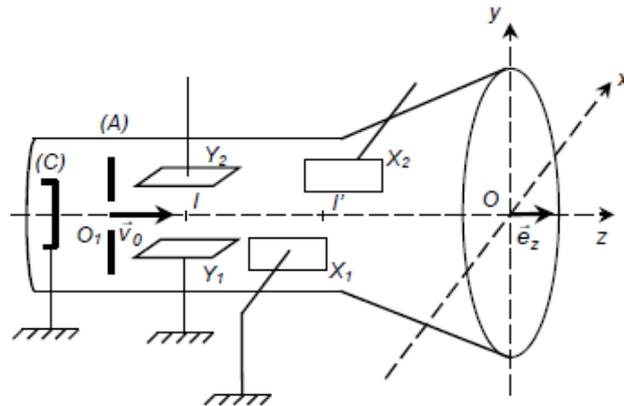
- La puissance et le travail de la composante magnétique sont toujours nuls. En effet, on constate que $\vec{F}_L = q \vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_O(M, t)$ est toujours perpendiculaire au vecteur vitesse, et par conséquent la puissance de la force de Lorentz magnétique $\vec{F}_L \cdot \vec{v}_{M/R}$ est nulle.
- La force magnétique est toujours perpendiculaire à la vitesse, elle va entraîner la courbure de la trajectoire de la particule.

Conclusion : le champ magnétostatique ne peut pas modifier l'énergie cinétique d'une particule chargée.

2. Etude d'un système mettant en œuvre un champ électrostatique uniforme.

2.1. Système étudié : l'oscilloscope analogique.

On considère un oscilloscope analogique dont le schéma est donné sur la figure ci-contre.



L'oscilloscope est composé de deux parties :

- Le canon à électrons. Des électrons sont arrachés à la cathode (C) avec une vitesse initiale négligeable puis sont accélérés dans un champ électrostatique uniforme et permanent dirigé selon Oz régnant dans l'espace compris entre cette cathode (C) et l'anode (A). Lorsqu'ils franchissent l'anode (A) Ils ont acquis une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$.
- La partie déflectrice qui va dévier le faisceau d'électrons généré par le canon. Entre les armatures Y₁ et Y₂ règne à nouveau un champ électrique uniforme qu'on supposera quasiment constant. Le champ électrique est alors perpendiculaire à la direction initiale des électrons et va dévier le faisceau selon la direction Oy. Le même principe est appliqué pour effectuer la déviation selon Ox entre les armatures X₁ et X₂.

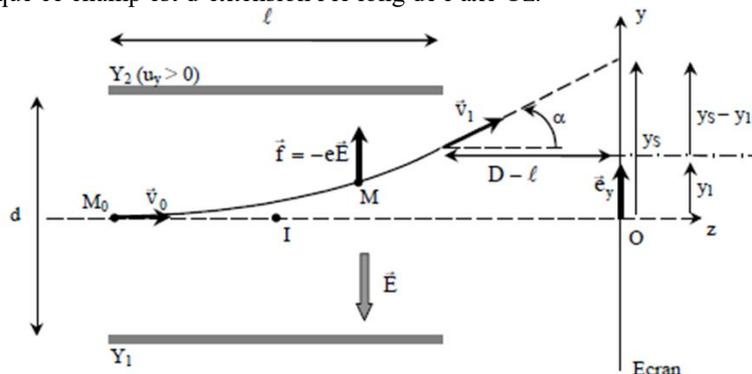
2.2. Etude du canon.

(Déjà mené dans la partie 1.3. du cours)

- On mesure à la sortie du canon une vitesse des électrons $v_0 = 2,5 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$. On reste dans le cadre non relativiste (mécanique classique, mécanique Newtonienne)
- La tension exercée entre les deux électrodes est notée $U_{AC} = \frac{m}{2e} v_0^2 = 1,8 \cdot 10^3 \text{ V}$

2.3. Etude de la déflexion.

Les plaques déflectrice Y₁, Y₂, vont générer un champ électrostatique uniforme $\vec{E} = -E_0 \vec{e}_y$ dans l'espace qui les sépare. Une tension $U_{21} = E_0 d$ est appliquée entre Y₂ et Y₁ qui sont séparées d'une distance d. On suppose que l'espace où est appliqué ce champ est d'extension l le long de l'axe Oz.



- On souhaite déterminer la durée mise par l'électron pour traverser l'espace inter armature et l'ordonnée y_s atteinte sur l'écran.

On applique la seconde loi de Newton à l'électron dans l'espace inter armature : $m \vec{a}_{M/R} = -e\vec{E}$

- On projette selon \vec{e}_z : $\ddot{z} = 0$; $\dot{z} = v_0$; $z(t) = v_0 t$.

On a ainsi : $z(\tau) = v_0 \tau = l$ A.N : $\tau = \frac{l}{v_0} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ s}$. Cette durée impacte la fréquence maximale des signaux observables sur l'écran de l'oscilloscope.

➤ On projette selon \vec{e}_y : $m\ddot{y} = eE_0$; $\dot{y} = \frac{eE_0}{m}t$; $y(t) = \frac{eE_0}{2m}t^2$

On obtient ainsi à l'instant τ : $y_1 = \frac{eE_0}{2m} \left(\frac{l}{v_0} \right)^2$

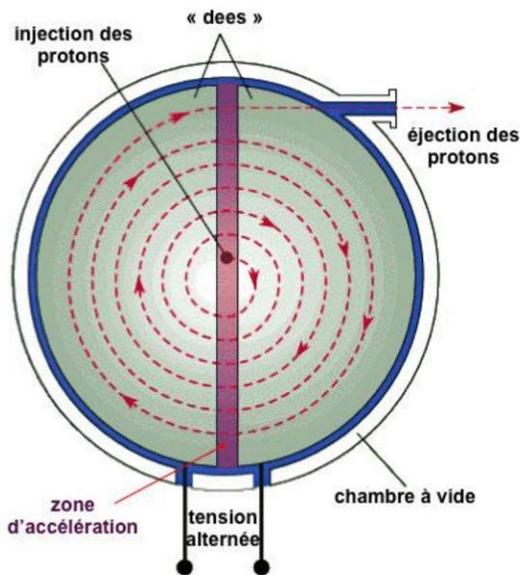
Dans l'espace entre la sortie du système déflecteur et l'écran, l'électron ne subit plus de force et son vecteur vitesse est conservé, ce vecteur fait un angle α avec l'horizontale tel que : $\tan \alpha = \frac{v_y(\tau)}{v_0}$ et l'ordonnée atteinte

sur l'écran s'exprime : $y_s = y_1 + (y_s - y_1) = \frac{eE_0}{2m} \left(\frac{l}{v_0} \right)^2 + (D-l) \tan \alpha = \frac{eE_0}{2m} \left(\frac{l}{v_0} \right)^2 + (D-l) \frac{eE_0}{m} \cdot \frac{l}{v_0^2}$

On constate que l'expression de y_s n'est pas simple mais qu'elle est proportionnelle à la norme du champ dans l'espace inter-armature et donc proportionnelle à la tension U_{21} appliquée entre les plaques ce qui remplit bien l'objectif de ce type d'appareil qui est de visualiser la tension enregistrée sur l'écran.

3. Etude du mouvement d'une particule dans un champ magnétostatique uniforme.

3.1. Système étudié : le cyclotron.



Ce type de système est utilisé pour accélérer des particules dans un espace qui reste raisonnable. Le système est constitué de deux éléments :

- Deux armatures appelées « dees » dans lesquelles règnent un champ magnétostatique uniforme, et qui infléchissent la trajectoire de la particule chargée dans le but de lui faire faire un demi tour.
- Une zone inter armature dans laquelle la particule est accélérée par un champ électrostatique alternativement orienté dans un sens ou dans l'autre de manière synchronisé avec la particule pour que la force électrostatique soit motrice.

Ces systèmes permettent entre autres de produire des sources radioactives d'isotopes de faible durée de vie utilisés par exemple dans les diagnostics médicaux. On peut citer ^{131}I dans les scanners de la thyroïde dont la durée de vie est de 8 jours. On utilise aussi ^{123}I de durée de vie plus courte (13h) et donc plus rapidement éliminé et donc introduit en plus faible dose.

3.2. Etude de la trajectoire de l'ion dans un des « dees ».

On considère un ion de masse m de charge q et de vitesse initiale prise sous la forme $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ plongé dans un champ magnétique perpendiculaire à cette vitesse initiale pris sous la forme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ ($B_0 > 0$)

L'ion est donc soumis à une force de Lorentz, de type magnétique : $\vec{F}_{q,\vec{B}} = q\vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_0$

On néglige toute autre action mécanique sur l'ion.

a. Etude naïve dans la base de projection cartésienne.

On applique la seconde loi de Newton dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen

$$m\vec{a}_{M/R} = q\vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_0$$

On obtient par projection dans la base cartésienne : $m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{qB_0}{m} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$

Il n'y aura donc pas de mouvement en dehors du plan si la vitesse initiale est dans le plan (xOy) perpendiculaire au champ magnétique.

On obtient donc le système d'équations dans (xOy) :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{qB_0}{m} \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{qB_0}{m} \dot{x} \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, il existe plusieurs méthodes, on présente ici la plus naïve.

On intègre la seconde équation en tenant compte des conditions initiales : $\dot{y} - \dot{y}(0) = -\frac{qB_0}{m}(x - x(0))$

On introduit l'expression obtenue $\dot{y} = -\frac{qB_0}{m}x$ dans la première : $\ddot{x} + \left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 x = 0$

On définit alors la pulsation cyclotron ω_C telle que $\ddot{x} + \omega_C^2 x = 0$ qui s'exprime $\omega_C = \left|\frac{qB_0}{m}\right|$

On prendra soin de garder la valeur absolue car la charge peut être positive ou négative.

On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique dont les solutions sont : $x(t) = A \cos(\omega_C t) + B \sin(\omega_C t)$

D'après les conditions initiales : $x(0) = 0 = A$; $\dot{x}(0) = v_0 = \omega_C \cdot B$ D'où : $x(t) = \frac{v_0}{\omega_C} \sin(\omega_C t)$;

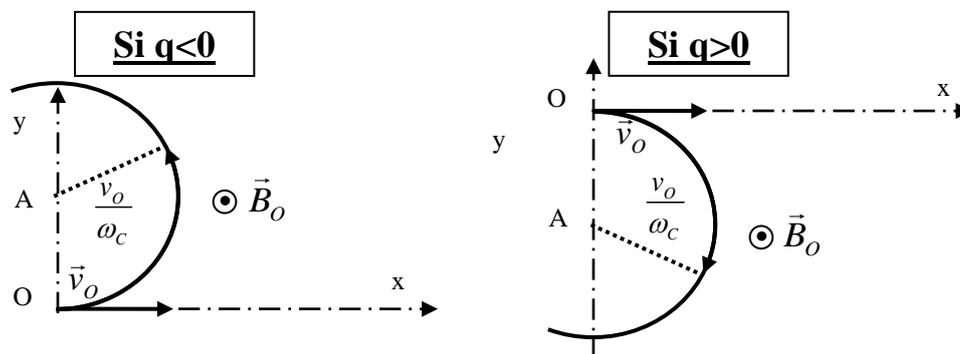
On en déduit que $\dot{y} = -\frac{qB_0}{m}x = -\varepsilon \omega_C x = -\varepsilon v_0 \sin(\omega_C t)$ où ε est le signe de la charge q tel que $\frac{qB_0}{m} = \varepsilon \omega_C$

Puis par intégration : $y(t) - y(0) = -\varepsilon v_0 \left[-\frac{\cos(\omega_C t)}{\omega_C} \right]_0^t = \varepsilon \frac{v_0}{\omega_C} (\cos(\omega_C t) - 1)$

On obtient finalement :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_C} \sin(\omega_C t) \\ y(t) = \varepsilon \frac{v_0}{\omega_C} (\cos(\omega_C t) - 1) \end{cases}$$

Il s'agit d'une trajectoire circulaire de rayon $\frac{v_0}{\omega_C}$ de centre de point $A \left(0, -\varepsilon \frac{v_0}{\omega_C} \right)$.



b. Etude avertie : on sait que la trajectoire est circulaire.

Si on admet le résultat prouvé précédemment, on peut faire une étude avertie, en utilisant une base de projection adaptée. On emploie alors une base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, en fixant l'origine en A et en faisant en sorte que $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

La cinématique donne alors : $\overline{OM} = R\vec{e}_r$; $\vec{v}_{M/R} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\vec{a}_{M/R} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$ où R est le rayon de la trajectoire circulaire.

On écrit alors la seconde loi de Newton : $m\vec{a}_{M/R} = q\vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_0$

On obtient par projection dans la base cylindro-polaire : $m \begin{pmatrix} -R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 0 \\ R\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$

Soit le système $\begin{pmatrix} -R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{qB_0}{m} \begin{pmatrix} R\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où

- La vitesse de rotation est constante $\dot{\theta} = -\frac{qB_0}{m} = -\varepsilon\omega_c$ avec la pulsation cyclotron $\omega_c = \left| \frac{qB_0}{m} \right|$
- On retrouve le rayon en observant la condition initiale : $v_o = R\omega_c$ d'où le rayon $R = \frac{v_o}{\omega_c}$
- Si la charge est négative ($q < 0$), $\dot{\theta} = \omega_c$, on tourne sur le cercle dans le sens trigonométrique, si la charge est positive ($q > 0$), $\dot{\theta} = -\omega_c$, on tourne sur le cercle dans le sens horaire.

Capacités exigibles

- Connaître et exploiter l'expression de la force de Lorentz
- Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique et magnétique et les comparer à ceux de la force gravitationnelle
- Savoir qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule
- Mettre en équation le mouvement dans un champ électrostatique uniforme et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant.
- Effectuer un bilan d'énergie pour calculer la vitesse atteinte par une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
- Connaître la phénoménologie du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur vitesse initiale est perpendiculaire au champ magnétique
- Déterminer le rayon, la vitesse angulaire et le sens de parcours de la trajectoire d'une charge ponctuelle dans un champ magnétique en admettant qu'elle est circulaire.

Exercice 1 : Limite relativiste.

On considère une particule de charge q et de masse m , produite à une vitesse initiale nulle et accélérée entre deux électrodes A et B dont la différence de potentiel est notée U_{AB} .

- Déterminer l'énergie cinétique de la particule à la sortie du système d'électrodes.
- Dans un modèle classique, exprimer alors la tension U_L pour laquelle la particule atteint une vitesse $c/10$, où c est la vitesse de la lumière.

On considère d'une part, un électron de masse $m = 9,1.10^{-31}$ kg et de charge $-e$ et d'autre part un proton de masse $m = 1,67.10^{-27}$ kg et de charge $e = 1,6.10^{-19}$ C.

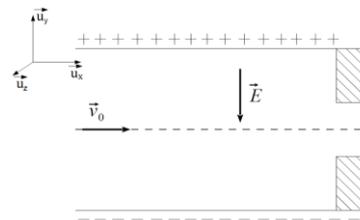
3. Préciser le signe de la tension appliquée entre les électrodes A et B puis déterminer numériquement U_L . Pour une particule relativiste, on montre que l'énergie cinétique s'exprime en fait $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ où le facteur

relativiste
$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

- Montrer que cette expression de l'énergie cinétique redonne l'expression classique dans la limite des faibles vitesses.
- Déterminer la vitesse réellement acquise par l'électron lorsqu'il est accéléré par la tension U_L . Faire l'application numérique en pourcentage de la vitesse de la lumière. Commenter le résultat.

Exercice 2 : Filtre de vitesse.

Un faisceau de particules de charge $q < 0$ pénètre avec une vitesse \vec{v}_0 entre les armatures d'un condensateur plan créant un champ électrostatique uniforme orienté comme indiqué sur la figure ci-contre. La sortie du condensateur est diaphragmée par une fente.



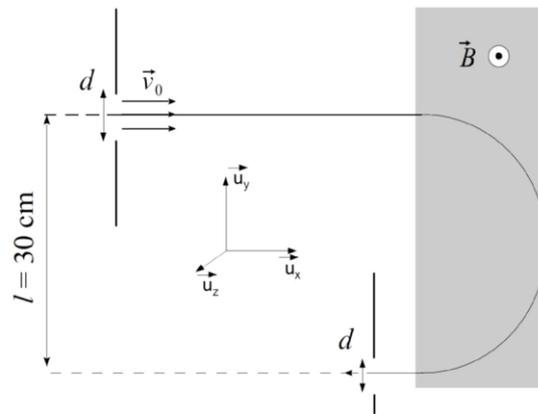
- Déterminer, en fonction de \vec{E} et \vec{v}_0 , le champ magnétique \vec{B} à appliquer pour que les particules du faisceau suivent une trajectoire rectiligne uniforme.
- Ce champ magnétique étant appliqué, on modifie la norme de la vitesse d'entrée. Analyser qualitativement la trajectoire des particules selon les cas suivants : $v > v_0$ ou $v < v_0$. Expliquer alors le titre de l'exercice.

Exercice 3 : séparateur d'isotopes.

On considère le dispositif ci-dessous dont l'objectif est de séparer deux isotopes de l'élément chimique « Z=1 » : l'isotope à un nucléon est l'hydrogène noté « H », l'isotope à deux nucléons est le deutérium noté « D ».

Soit un jet homocinétique d'ions H_2^+ et D_2^+ ayant une vitesse $v_0 = 1000$ m.s⁻¹, pénétrant dans une zone de champ magnétique uniforme et stationnaire (zone grisée). Ce jet est cylindrique de diamètre $d = 1$ mm. On désire obtenir, à la sortie, un jet constitué uniquement d'ions D_2^+ .

Donnée : masse d'un proton ou d'un neutron : $m_n = 1,67.10^{-27}$ kg



On admet que la trajectoire de la particule dans la zone grise est circulaire.

- Montrer que la norme de la vitesse est constante et exprimer le rayon R de la trajectoire en fonction de m , e et v .
- En déduire l'intensité B du champ magnétique à appliquer pour que seuls les isotopes D_2^+ franchissent l'ouverture percée.

Exercice 4 : Chambre à bulles.

Pour étudier les particules produites lors de la collision de particules cibles dans les grands accélérateurs ou les particules émises par une réaction nucléaire, on observe leurs trajectoires dans une chambre à bulles dans laquelle on impose un champ magnétique constant orienté selon l'axe Oz et de norme B_0 . Cette chambre contient un liquide saturant, qui se vaporise au passage des particules, les bulles ainsi produites permettent alors de visualiser les trajectoires. On modélise l'action du liquide saturant par une force de frottement fluide linéaire de coefficient α_F .

On considère une particule de masse m et de charge q initialement placée en O l'origine du repère spatial et dont la vitesse initiale est donnée par : $\vec{v}_O = v_{Ox}\vec{e}_x + v_{Oz}\vec{e}_z$

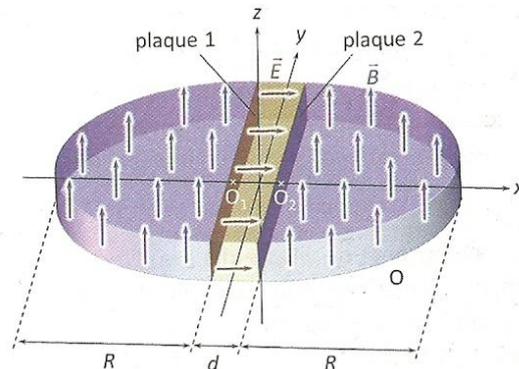
1. Etablir les équations du mouvement de la charge. Faire apparaître une pulsation cyclotron ω_C et un temps d'amortissement τ .
2. Etablir alors l'expression de $\dot{z}(t)$ et de $z(t)$.

On pose la variable complexe $u = x + jy$.

3. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\dot{u}(t)$ et la résoudre. En déduire $u(t)$.
4. Etablir alors les expressions de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ puis celles de $x(t)$ et $y(t)$.
5. Déterminer la position finale de la particule et représenter « artistiquement » la trajectoire.

Exercice 5 : Accélérateur cyclotron.

Un cyclotron est un dispositif destiné à accélérer des particules chargées en utilisant un champ électrostatique uniforme appliqué entre deux plaques parallèles distantes de d . Pour réduire l'encombrement de l'appareil et la tension à appliquer, un champ magnétostatique uniforme et constant est appliqué dans deux boîtes hémisphériques de rayon R , qu'on appelle des dyes, situés de part et d'autre des plaques. Le vide est fait dans l'ensemble du cyclotron et les plaques comportent un petit espace permettant aux particules de les traverser.



On étudie le mouvement dans le repère (Oxyz) dont l'origine O est prise au centre du dispositif. Le champ électrostatique est porté par l'axe (Ox), le champ magnétostatique est selon (Oz). Un proton de masse m et de charge e part sans vitesse initiale du point O_1 situé à l'intersection de la plaque « de gauche » et de l'axe (Ox). Il est accéléré le long de l'axe Ox par un champ de norme E , généré en appliquant une tension U entre les plaques, et atteint le point O_2 , situé sur la seconde plaque.

On donne : $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg ; $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C ; $U = 5,00$ kV ; $d = 1$ cm ; $R = 1$ m ; $B = 1$ T.

1. Quel sens faut-il donner au champ électrostatique pour accélérer le proton de O_1 en O_2 ? Exprimer alors l'énergie cinétique E_{c1} du proton après une traversée de l'espace entre les plaques.
2. En faisant l'hypothèse que le proton reste non relativiste, exprimer alors v_1 la vitesse atteinte par le proton. Déterminer la durée t_1 de la première traversée.
3. En faisant l'hypothèse d'une trajectoire circulaire, étudier le mouvement du proton dans le dye de droite. Exprimer la durée t_1' du demi tour dans le dye pour qu'il rejoigne la plaque 2 ainsi que le rayon R_1 de la trajectoire. Evaluer numériquement t_1' et le comparer à t_1 .

On retourne alors le sens du champ électrostatique en faisant en sorte qu'il accélère toujours le proton lorsqu'il traverse l'espace entre les plaques et on réalise cette opération jusqu'à ce que le proton ait été accéléré par n passages entre les plaques.

4. En étudiant la seconde traversée, exprimer l'énergie cinétique E_{c2} du proton à la fin de la seconde traversée. Montrer alors par récurrence l'expression de E_{cn} après n traversées.
5. Déterminer la durée t_2 de la seconde traversée. Par récurrence, obtenir l'expression de t_n .
6. En étudiant le nième passage dans un dye, exprimer sa durée t_n' et le rayon R_n du demi cercle parcouru.
7. Montrer que le rayon des dyes limite le nombre de passages entre les plaques. Exprimer le nombre de passages dans l'espace inter-armatures et la vitesse atteinte par le proton en sortie du système.
8. Faire les applications numériques pour la vitesse du proton pour le nombre de passages dans l'espace inter-armature. Exprimer et évaluer la longueur et la tension à appliquer entre les deux plaques d'un accélérateur linéaire permettant d'atteindre la même vitesse de sortie. Conclure.