

Problème 1 : trains à sustentation magnétique.

1. Pour l'association en série des trois composants soumis à la tension $e(t)$.

On applique le diviseur de tension pour obtenir $u_1 = \frac{Z_{L_1}}{Z_{L_1} + Z_{L_2} + Z_R} e$

d'où $u_1 = \frac{jL_1\omega}{j(L_1 + L_2)\omega + R} e$ et $u_2 = \frac{jL_2\omega}{j(L_1 + L_2)\omega + R} e$

2. Pour un modèle idéal d'ALI, la résistance d'entrée tend vers l'infini et les intensités des courants i_+ et i_- dans les bornes d'entrée inverseuse et non inverseuse sont nulles. La résistance de sortie tend vers zéro, l'intensité sortant par la borne de sortie est limitée à la valeur i_{sat} prenant typiquement la valeur de 25mA.

3. On peut faire l'hypothèse d'un fonctionnement linéaire de l'ALI car il y a une boucle de rétroaction sur la borne d'entrée inverseuse. On peut alors écrire la relation $V_+ = V_-$.

4. On peut évaluer le potentiel de la borne non inverseuse par un diviseur de tension car l'intensité entrant dans l'ALI par cette borne est nulle d'où $V_+ = \frac{1}{2} u_1$

On peut faire une loi des nœuds en terme de potentiel à la borne d'entrée inverseuse en tenant compte du fait que l'intensité entrant dans l'ALI à cette borne est nulle : $\frac{V_- - u_2}{R_2} + \frac{V_- - u_s}{R_2} = 0$

En combinant les deux équations, on obtient alors $u_s = u_1 - u_2$

5. On obtient avec le résultat de la q4 et celui de la q1 : $u_s = \frac{j(L_1 - L_2)\omega}{j(L_1 + L_2)\omega + R} e$

On l'écrit sous la forme $\underline{T}(j\omega) = \frac{u_s}{e} = \frac{j \frac{(L_1 - L_2)}{R} \omega}{1 + j \frac{(L_1 + L_2)}{R} \omega} e$ à identifier avec $\underline{T}(j\omega) = \frac{T_o \left(\frac{j\omega}{\omega_o} \right)}{1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_o} \right)}$

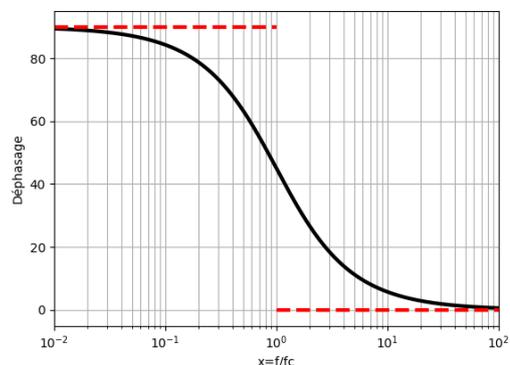
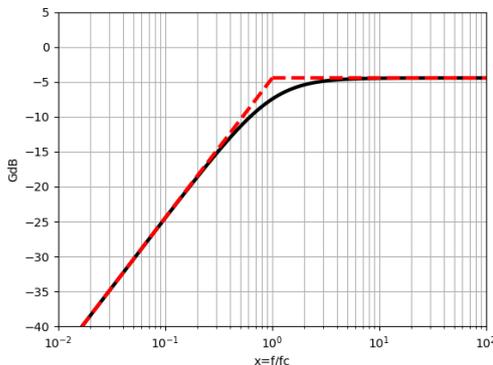
Ce qui donne $\frac{1}{\omega_o} = \frac{L_1 + L_2}{R}$ et $\frac{T_o}{\omega_o} = \frac{L_1 - L_2}{R}$ ce qui donne $\omega_o = \frac{R}{L_1 + L_2}$ et $T_o = \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2}$

En reprenant les expressions fournies pour L_1 et L_2 , on obtient alors $\omega_o = \frac{R}{2L_e}$ et $T_o = \frac{\Delta z}{\delta}$

6. HF, $\underline{T}(j\omega) \rightarrow T_o$ alors $G(\omega) \rightarrow |T_o|$; $G(\omega) \rightarrow 20 \log |T_o|$ et $\varphi(\omega) \rightarrow \arg(T_o)$

BF, $\underline{T}(j\omega) \rightarrow T_o \left(\frac{j\omega}{\omega_o} \right)$ alors $G(\omega) \rightarrow |T_o| \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)$, $G(\omega) \rightarrow 20 \log |T_o| + 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)$ et $\varphi(\omega) \rightarrow \arg(T_o) + \frac{\pi}{2}$

En $\omega = \omega_o$: $\underline{T}(j\omega_o) = \frac{jT_o}{1 + j}$ alors $G(\omega_o) = \frac{T_o}{\sqrt{2}}$; $G(\omega_o) \rightarrow 20 \log |T_o| - 3dB$ et $\varphi(\omega_o) = \arg(T_o) + \frac{\pi}{4}$



7. Il s'agit d'un filtre passe haut d'ordre 1, dont la fréquence de coupure s'identifie avec la fréquence propre. La bande passante s'étend alors sur l'intervalle $[f_o, +\infty[$.

8. Pour que la fonction de transfert soit indépendante de la fréquence, il faut travailler à haute fréquence et

alors $\underline{T}(j\omega) \rightarrow T_o = \frac{\Delta z}{\delta}$ la fonction de transfert est bien réelle.

9. La fréquence de coupure du filtre s'exprime $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{R}{4\pi L_e}$ A.N : $f_o = 1,0kHz$, on peut donc estimer que $f=4kHz$ est dans le domaine HF pour lequel $T = T_o = \frac{\Delta z}{\delta}$

On en déduit que $u_s = \frac{\Delta z}{\delta} e$ et par retour aux notations réelles $u_s = \frac{\Delta z}{\delta} e = \frac{\Delta z}{\delta} E \cos(\omega t)$ On obtient $\varphi = 0$

10. Le circuit multiplieur fournit la tension $s_m(t) = K u_s(t) e(t) = K \frac{\Delta z}{\delta} E^2 \cos^2(\omega t)$

11. Il faut linéariser l'expression précédente : $s_m(t) = K u_s(t) e(t) = K \frac{\Delta z}{2\delta} E^2 + K \frac{\Delta z}{2\delta} E^2 \cos(2\omega t)$

On obtient donc deux composantes :

- Une composante continue (donc de fréquence nulle) d'amplitude $S_m = K \frac{\Delta z}{2\delta} E^2$
- Une composante de fréquence $2f$ de phase à l'origine nulle et d'amplitude $K \frac{\Delta z}{2\delta} E^2$

12. On doit extraire la composante de fréquence nulle d'un signal comportant cette composante et une coposante sinusoïdale de fréquence $2f$. Il faut utiliser un filtre passe bas, dont la fréquence de coupure est nettement inférieure à $2f$.

13. La sensibilité du capteur s'exprime alors $\frac{S_m}{\Delta z} = \frac{K}{2\delta} E^2$

Le plus petit déplacement détecté sera alors exprimé par $\frac{\Delta z}{\delta} = \frac{2S_{m,\min}}{KE^2} = 5,6 \cdot 10^{-4}$ soit un écart à la position moyenne d'1/2 millièème de l'écartement total !!

Problème 2 : Câble coaxial.

a. Propagation d'impulsions de tension dans le câble.

1. On considère ici une onde progressive unidimensionnelle se propageant dans la direction et le sens de l'axe (Oz) à la célérité c . L'expression générale de ce type d'onde est $U(z, t) = f(z - ct) = F\left(t - \frac{z}{c}\right)$

L'onde parcourt la longueur totale du câble en une durée $t_1 = \frac{L}{c}$. Sur cet intervalle, on connaît $U(z=0, t)$ et on peut donc en déduire $F(t)$. Il suffit alors de substituer dans l'expression donnée, la variable t par la nouvelle variable $t-z/c$ ce qui donne.

$$U(z=0, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E & \text{si } 0 \leq t < \tau \\ 0 & \text{si } \tau \leq t \end{cases} \quad \text{Par changement de variable} \quad U(z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{z}{c} \\ E & \text{si } \frac{z}{c} \leq t < \tau + \frac{z}{c} \\ 0 & \text{si } \tau + \frac{z}{c} \leq t < t_1 \end{cases}$$

2. Après réflexion, on doit étudiée une onde progressive unidimensionnelle se propageant dans la direction de (Oz) mais de sens opposé à la célérité c . D'où $U(z, t) = g(z + ct) = G\left(t + \frac{z}{c}\right)$

En $z = L$, on peut établir avec la condition de réflexion totale que la tension est continue et s'exprime :

$$U(z=L, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{L}{c} \\ E & \text{si } \frac{L}{c} \leq t < \tau + \frac{L}{c} \\ 0 & \text{si } \tau + \frac{L}{c} \leq t \end{cases}$$

Sur l'intervalle de temps $\left[t_1' = \tau + \frac{L}{c}, t_p = \frac{2L}{c} \right]$ pour lequel seule l'onde réfléchie est présente dans le câble, on obtient $U(z,t)$ à partir de $U(z=L,t)$ en identifiant $G(t+L/c)$ avec $U(z=L,t)$. Il suffit de substituer dans l'expression établie la variable t par la variable $t+(z-L)/c$.

$$U(z=L,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{L}{c} \\ E & \text{si } \frac{L}{c} \leq t < \tau + \frac{L}{c} \\ 0 & \text{si } \tau + \frac{L}{c} \leq t \end{cases}$$

Par changement de variable

$$U(z,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{2L-z}{c} \\ E & \text{si } \frac{2L-z}{c} \leq t < \tau + \frac{2L-z}{c} \\ 0 & \text{si } \tau + \frac{2L-z}{c} \leq t < \frac{2L}{c} \end{cases}$$

Sur l'intervalle de temps $[t_1, t_1']$ les deux ondes se superposent mais on ne demande pas d'étudier le cas ici.

3. Lorsque le GBF est seul, on peut déterminer :

- L'amplitude E des impulsions qui est de 3 carreaux pour un calibre de 1V/div soit : $E = 3,0V$
- La période T qui est de 4 carreaux pour une base de 1μs/div soit $T = 4,0\mu s$
- La durée des impulsions de 0,5 carreau soit $\tau = 0,5\mu s$

Lorsque le câble est connecté en plus du GBF, on constate l'apparition d'une impulsion supplémentaire image de l'onde qui s'est propagée sur un aller retour dans le câble et on peut déterminer le temps de vol de l'impulsion à la durée $t_p = 1,1\mu s$ en supposant que le temps de vol est inférieur à la période T .

4. La célérité de l'onde est exprimée par $c = \frac{2L}{t_p}$ A.N $c = 1,8 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

b. Analyse spectrale des impulsions de tension.

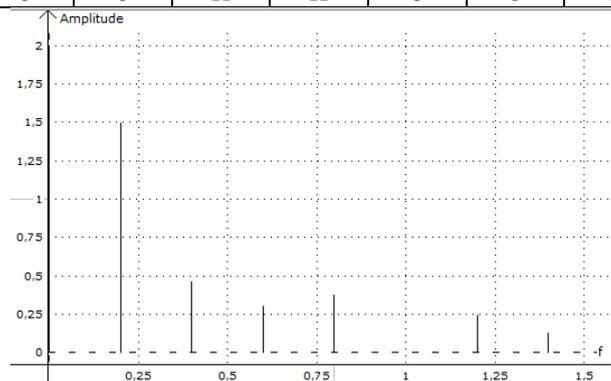
5. On effectue ici une analyse de Fourier du signal, c'est-à-dire la décomposition du signal périodique en une série de fonctions harmonique. Le terme f_1 désigne ici la fréquence du fondamental de la décomposition, il s'exprime en fonction de la période du signal par $f_1 = \frac{1}{T}$

6. Dans la décomposition de Fourier, le terme constant correspond à la valeur moyenne du signal étudié.

La valeur moyenne est définie par : $\langle U(t) \rangle_T = \int_{t_0}^{t_0+T} U(t) dt$ ce qui donne bien après calcul : $\langle U(t) \rangle_T = E \frac{\tau}{T}$

7. On établit le tableau suivant :

| Rang n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----------------|-----|-----|------|-------|-------|---|------|------|-------|
| $C_n > 0$ (V) | 2,0 | 1,5 | 0,47 | 0,31 | 0,38 | 0 | 0,25 | 0,13 | 0,12 |
| Φ_n (rad) | 0 | 0 | 0 | Π | Π | 0 | 0 | 0 | Π |



8.

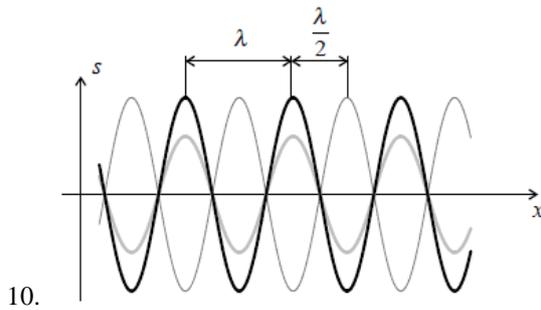
Spectre du signal. L'amplitude est en Volt, la fréquence est en MHz.

c. Ondes stationnaires dans le câble coaxial.

9. L'expression générale demandée est : $s(z,t) = A \cos(2\pi ft) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z + \varphi\right)$

Si un ventre de vibration doit être présent en $z = 0$, il faut que $|\cos(\varphi)| = 1$, on peut alors choisir $\varphi = 0$ pour

aboutir à l'expression simplifiée $s(z,t) = A \cos(2\pi ft) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right)$



En noir le profil de l'onde en $t=0$, en gris clair le profil en $t= T/2$, en gris foncé, le profil à un instant quelconque.

Entre deux ventres on observe une distance de $\lambda/2$ (deux ventres successifs vibrent en opposition de phase), entre un ventre et un nœud on observe une distance de $\lambda/4$.

10.

11. Si un ventre est imposé en $z=L$, l'expression doit vérifier $\left| \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} L\right) \right| = 1$ ce qui sélectionne les longueurs d'onde indicées par k pris dans \mathbb{N}^* telles que $\frac{2\pi}{\lambda_k} L = k\pi$ soient $\lambda_k = \frac{2L}{k}$

Avec la relation liant fréquence et longueur d'onde, on obtient $f_k = \frac{c}{\lambda_k} = \frac{c}{2L} k$

12. Si un nœud est imposé en $z=L$, l'expression doit vérifier $\left| \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} L\right) \right| = 0$ ce qui sélectionne les longueurs d'onde indicées par k pris dans \mathbb{N} telles que $\frac{2\pi}{\lambda'_k} L = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ soient $\lambda'_k = \frac{2L}{k + \frac{1}{2}}$

Avec la relation liant fréquence et longueur d'onde, on obtient $f'_k = \frac{c}{\lambda'_k} = \frac{c}{2L} \left(k + \frac{1}{2}\right)$

13. Lorsqu'on place en extrémité du câble un signal de fréquence correspondant à une des fréquences propres du câble, on observe un phénomène de résonance qui explique les maxima d'amplitude de la tension mesurée.

14. Lorsqu'on impose un nœud en $z = L$, la plus petite fréquence de résonance est obtenue pour $k = 0$ et prend la valeur : $f_0' = \frac{c}{4L}$, Lorsqu'on impose un ventre en $z = L$, la plus petite fréquence de résonance est obtenue pour $k = 1$ et prend la valeur $f_1 = \frac{c}{2L}$

Dans les deux situations, l'écart entre deux résonances est constant prenant la valeur $\Delta f = \frac{c}{2L}$.

Les observations faites dans les deux tableaux sont cohérentes avec ces résultats si on considère que :

- Placer l'extrémité du câble en court circuit correspond à imposer un ventre en ce point.
- Placer l'extrémité du câble en sortie ouverte correspond à imposer un nœud en ce point.

15. On exploite les fréquences extrêmes dans les tableaux pour obtenir la meilleure évaluation possible de la célérité soit : $f_0' = \frac{c}{4L}$ et $f_7 = \frac{7c}{2L}$ ce qui donne : $f_7 - f_0' = \frac{13c}{4L}$

On obtient finalement : $c = \frac{4L}{13} (f_7 - f_0')$ A.N : $c = 1,93 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

16. On obtient donc par les deux méthodes des valeurs de la célérité qui diffèrent d'environ 7%. La précision de la seconde méthode est a priori meilleure mais il faudrait effectuer une estimation des incertitudes pour s'en assurer.

Problème 3 : Interféromètre de Michelson.

1. Les ondes produites par les deux sources S_1 et S_2 sont **synchrones**, de même longueur d'onde λ_0 , et **cohérentes** car initialement produites par la même source primaire. Elles pourront donc produire des interférences observées sur le plan (E).

2. L'intensité lumineuse produite en M s'exprime : $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi_{2/1}(M))$.

3. L'intensité lumineuse est minimale lorsque les interférences sont parfaitement destructives, correspondant à $\Delta\varphi_{2/1}(M) = 2\pi \left(k + \frac{1}{2}\right)$, l'intensité est alors égale à $I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$.

Par identité remarquable $I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$ qui est minimale quand elle s'annule pour $I_1 = I_2 = I_0$.

4. L'intensité dans ces conditions s'exprime $I(M) = 2I_0 [1 + \cos(\Delta\varphi_{2/1}(M))]$

5. **Définition : On définit le chemin optique comme la distance qu'aurait parcouru la lumière dans le vide pendant le temps qu'elle a mis à parcourir le trajet de S en M, on le note (SM) . Dans un milieu d'optique d'indice n, il s'exprime $(SM) = nSM$, où SM est la distance de S en M.**

On définit la différence de marche entre les deux ondes par : $\delta_{1/2}(M) = (SM)_1 - (SM)_2$ et on la

relie au déphasage entre les deux ondes en un point par : $\Delta\varphi_{2/1}(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_{1/2}(M)$

6. Dans le triangle CBM, on observe $L = \frac{D}{\cos \theta}$.

7. Dans la base cylindrique associée à M, $\vec{S_2M} = \begin{pmatrix} (L \sin \theta)_{\vec{e}_r} \\ (L \cos \theta - \frac{b}{2})_{\vec{e}_\theta} \end{pmatrix}$ et $\vec{S_1M} = \begin{pmatrix} (L \sin \theta)_{\vec{e}_r} \\ (L \cos \theta + \frac{b}{2})_{\vec{e}_\theta} \end{pmatrix}$

d'où $l_2 = \sqrt{\left((L \sin \theta)^2 + \left(L \cos \theta - \frac{b}{2} \right)^2 \right)} = \sqrt{\left(L^2 + \left(\frac{b}{2} \right)^2 - bL \cos \theta \right)}$ en exploitant $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$

de même $l_1 = \sqrt{\left(L^2 + \left(\frac{b}{2} \right)^2 + bL \cos \theta \right)}$

8. Puisque $b \ll L$, on réécrit $l_2 = L \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2L} \right)^2 - \frac{b}{L} \cos \theta}$,

L'approximation affine donne $l_2 \xrightarrow{DL1} L \left(1 - \frac{1}{2} \frac{b}{L} \cos \theta \right)$ et $l_1 \xrightarrow{DL1} L \left(1 + \frac{1}{2} \frac{b}{L} \cos \theta \right)$

9. On obtient $\delta_{1/2}(M) = (SS_1M) - (SS_2M) = (SS_1) - (SS_2) + n_o(l_1 - l_2)$

D'après l'énoncé $(SS_1) = (SS_2)$ et finalement $\delta_{1/2}(M) = n_o b \cos \theta$ et $\Delta\varphi_{2/1}(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_o b \cos \theta$

10. L'intensité lumineuse ne dépend que de l'angle d'inclinaison θ , on observera donc une alternance de cercles clairs et de cercles sombres de centre B. Le déphasage introduit est maximal en B pour $\theta=0$, au centre de la figure d'interférence.

11. On observe en B des interférences parfaitement constructives, alors $I(B) = 4I_0$

12. Lorsqu'on se déplace en s'éloignant de B, le déphasage diminue. On en déduit que le premier angle θ_1 non nul pour lequel on observe des interférences parfaitement constructives correspond à un déphasage

de $\Delta\varphi_{2/1} = 2\pi(p_o - 1)$ ce qui donne $2\pi(p_o - 1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_o b \cos \theta_1$ d'où $\cos \theta_1 = \frac{\lambda_0}{n_o b} (p_o - 1)$

Par analogie pour le k-ième anneau $\Delta\varphi_{2/1} = 2\pi(p_o - k)$ et $\cos \theta_k = \frac{\lambda_0}{n_o b} (p_o - k)$

13. Avec l'ajout des récipients, on ajoute la même différence de marche sur les deux voies, et alors le vide fait sur la voie 1, on obtient $\delta'_{1/2}(M) = \delta_{1/2}(M) + (vide)_e - (air)_e = \delta_{1/2}(M) + 2e - 2n_o e$

Finalement $\delta'_{1/2}(M) = \delta_{1/2}(M) + 2e(1 - n_o)$

14. On part d'un anneau clair au centre, on voit défilé 10 anneaux sombres et on arrive sur un dernier anneau clair. On en déduit que le « dixième » anneau clair précédent est arrivé au centre et que le déphasage passe de $\Delta\varphi_{2/1}(B) = 2\pi p_o$ à $\Delta\varphi'_{2/1}(B) = 2\pi(p_o - 10)$.

On en déduit $\Delta\varphi'_{2/1}(B) = \Delta\varphi_{2/1}(B) - \frac{2\pi}{\lambda_0} * 2e(n_o - 1) = 2\pi(p_o - 10)$ d'où $(n_o - 1) = 5 \frac{\lambda_0}{e}$ A.N $(n_o - 1) = 2,95.10^{-4}$