

Problème 1 : trains à sustentation magnétique.

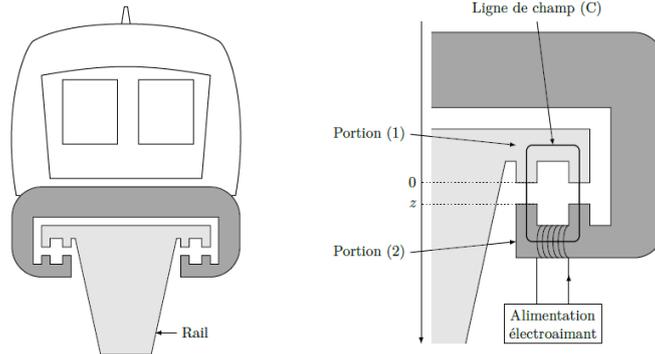
Un train à sustentation magnétique utilise les forces magnétiques pour léviter au dessus de la voie ; il n'est donc pas en contact avec des rails, contrairement aux trains classiques. Ce procédé permet de supprimer la résistance au roulement et d'atteindre des vitesses élevées.

Parmi les technologies, on peut isoler le transrapid qui lévite par attraction magnétique grâce à des aimants.

La seule réalisation commerciale du Transrapid est à l'heure actuelle la ligne de 30 kilomètres qui fonctionne depuis 2004 entre Shanghai et son aéroport international de Pudong. Le trajet s'effectue en moins de 8 minutes, à la vitesse moyenne de 245 km/h. Sur ce parcours le train atteint la vitesse de 430 km/h, il a la capacité d'accélérer de 0 à 350km/h en 2 minutes.



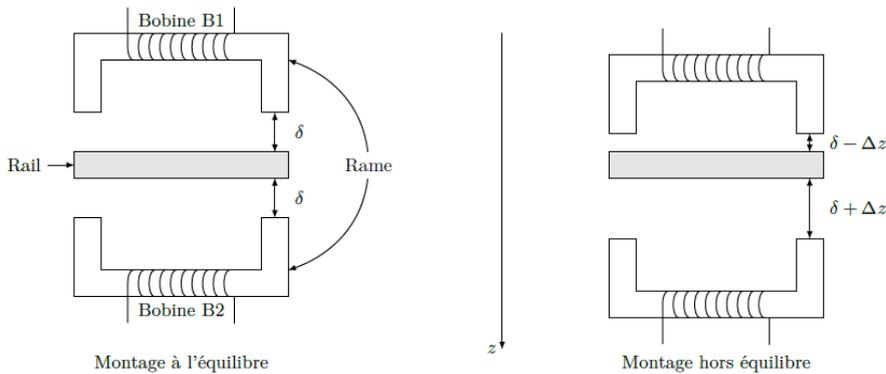
Photo du transrapid.



Représentation du système de sustentation magnétique du transrapid.

L'instabilité de l'équilibre de la rame en sustentation nécessite l'asservissement en position de l'entrefer. Cet asservissement est réalisé en utilisant un capteur de position. On se propose dans cette partie d'étudier le principe d'un capteur de position à inductance variable.

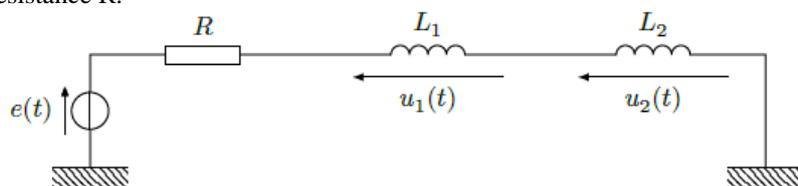
La figure suivante décrit le schéma de principe d'un capteur inductif à entrefer variable dans un montage « push-pull ». Le capteur comprend un circuit magnétique composé d'un noyau solidaire du rail fixe et de deux bobines B₁ et B₂ sur deux noyaux ferromagnétiques en vis-à-vis, solidaires de la rame. Les bobines B₁ et B₂ du capteur sont identiques et placées de façon symétrique par rapport au rail lorsque la rame est à l'équilibre (à gauche). Ces bobines B₁ et B₂ sont indépendantes des bobines assurant la lévitation. Elles sont constituées de N_C spires de surface S.



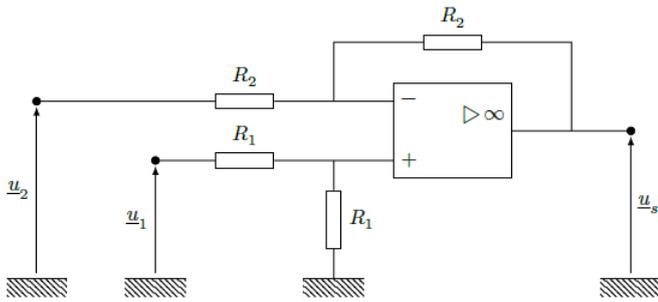
On envisage une variation Δz de la position du train par rapport à la position d'équilibre $z_e = \delta$. En considérant que $\Delta z \ll \delta$, on montre que l'inductance des deux bobines situées de part et d'autre du rail s'expriment :

$$L_1 = L_e \left(1 + \frac{\Delta z}{\delta} \right) \text{ et } L_2 = L_e \left(1 - \frac{\Delta z}{\delta} \right)$$

Les deux bobines sont alimentées par un générateur de tension idéal de force électromotrice $e(t) = E \cos(\omega t)$ en série avec un conducteur ohmique de résistance R.



- Déterminer les expressions des tensions électriques complexes \underline{u}_1 et \underline{u}_2 en fonction de R, L₁, L₂, ω et $\underline{e}(t)$. Ces tensions \underline{u}_1 et \underline{u}_2 sont placées à l'entrée du montage présenté sur la figure suivante. L'ALI est pris dans le modèle idéal.



- Rappeler les hypothèses attachées au modèle idéal de l'ALI.
- Expliquer pourquoi on peut faire l'hypothèse d'un fonctionnement linéaire de l'ALI. Rappeler alors la relation vérifiée.
- Exprimer la tension électrique \underline{u}_s en fonction des tensions \underline{u}_1 et \underline{u}_2 .

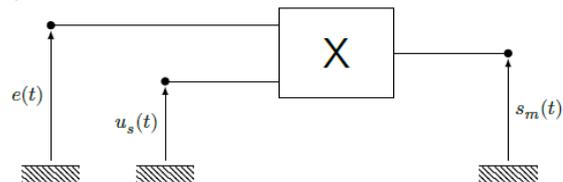
5. Déterminer la fonction de transfert complexe du système total sous la forme $\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{e}} = \frac{T_o \left(\frac{j\omega}{\omega_o} \right)}{1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_o} \right)}$ où T_o et ω_o sont

- deux paramètres à exprimer en fonction de $(L_1, L_2$ et $R)$ puis en fonction de $(L_e, R, \Delta z$ et $\delta)$.
- Effectuer l'étude asymptotique de la fonction de transfert $\underline{T}(j\omega)$ à basse fréquence puis à haute fréquence. Préciser le comportement du filtre à la pulsation ω_o .
 - Tracer le diagramme de Bode asymptotique puis le diagramme de Bode réel de ce filtre. Préciser le type de filtre et la bande passante.
 - Dans quelle gamme de fréquences doit-on travailler pour que $\underline{T}(j\omega)$ soit indépendant de la pulsation ? Montrer alors que la fonction de transfert est réelle et s'exprime $\frac{\Delta z}{\delta}$?

On prend pour valeur numérique : $R=750\Omega$; $L_e=60\text{mH}$ et une fréquence d'exploitation $f=4\text{kHz}$.

9. Montrer que le signal de sortie se met sous la forme $u_s(t) = E \frac{\Delta z}{\delta} \cos(\omega t + \varphi)$. Exprimer le déphasage φ .

Pour pouvoir corriger la position de la rame lorsqu'elle s'écarte de sa position d'équilibre, on souhaite construire une tension continue qui soit une image de l'écart Δz à la position d'équilibre. On utilise pour cela un circuit multiplieur de constante de multiplication $K_m=1,00\text{V}^{-1}$.



- Exprimer la tension électrique $s_m(t)$ en fonction de $K_m, e(t)$ et $u_s(t)$ puis en fonction de $E, \Delta z, \delta, \omega$ et t .
- Transformer l'expression précédente et aboutir à la description du signal $s_m(t)$ sous la forme d'une décomposition harmonique en précisant les amplitudes, les pulsations, et les phases à l'origine des différentes composantes.
- Quel filtre faut-il placer en sortie du montage multiplieur pour récupérer une tension continue S_m proportionnelle au déplacement Δz ? Préciser la nature du filtre et préciser qualitativement les contraintes sur les paramètres de ce filtre.
- Exprimer la sensibilité du capteur définie par la relation $\frac{S_m}{\Delta z}$. Application numérique : le capteur permet de mesurer la tension de sortie à 10mV près. En déduire la plus petite valeur de $\Delta z/\delta$ détectable. On prendra $E=6,00\text{V}$.

Problème 2 : Câble coaxial.

On considère un câble coaxial de longueur $L = 100\text{m}$ constitué d'une âme et d'une gaine en cuivre séparées par un milieu diélectrique. On connecte ce câble en $z = 0$ à un GBF qui l'alimente avec des signaux dont la nature sera variable en fonction des différentes parties du problème.

a. Propagation d'impulsions de tension dans le câble.

Dans un premier temps, on considère une seule impulsion de tension d'amplitude E , de profil rectangulaire et de durée τ qu'on peut associer au signal exprimé ci contre.

$$U(z=0, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E & \text{si } 0 \leq t < \tau \\ 0 & \text{si } \tau \leq t \end{cases}$$

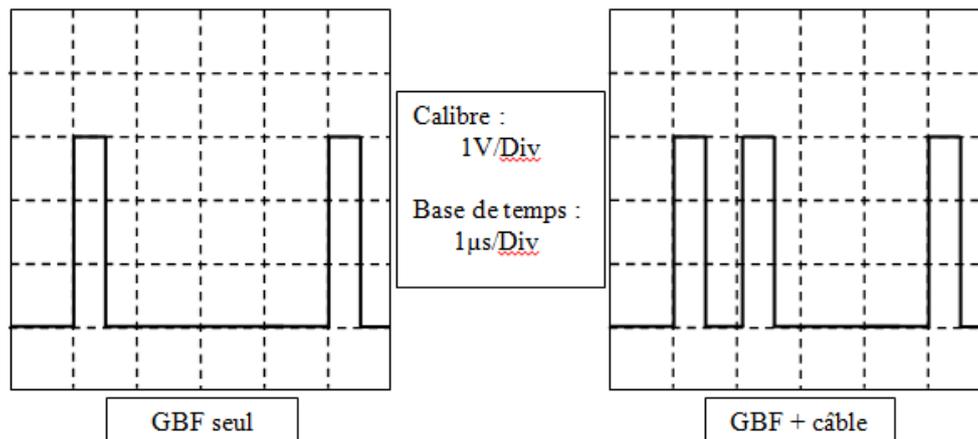
On considère maintenant la propagation de cette impulsion dans le câble coaxial et on suppose qu'elle s'effectue sans déformation avec une célérité c dans le sens croissant des z .

- Quelle est le nom et l'expression générale associée au type d'onde considérée ici. En déduire l'expression de $U(z, t)$ dans le câble sur l'intervalle temporel $0 < t < t_1$ où seul l'onde incidente est présente. On précisera l'expression de t_1 .

On suppose qu'on se place dans des conditions où l'impulsion se réfléchit parfaitement sur l'extrémité $z = L$ du câble coaxiale et qu'elle n'introduit aucun déphasage.

- Donner l'expression générale du type d'onde à considérer après la réflexion. En déduire l'expression de $U(z, t)$ dans le câble sur l'intervalle temporel $t_1' < t < t_p$ où seule l'onde réfléchie est présente dans le câble. On précisera les expressions de t_1' et t_p .

Pour déterminer la célérité des ondes dans ce câble, on génère en fait une série périodique de période T d'impulsions de durée τ , on observe alors à l'oscilloscope la tension aux bornes du GBF c'est-à-dire en $z = 0$.
On observe les deux situations suivantes :



- Expliquer comment on peut exploiter les représentations précédentes pour déterminer : l'amplitude E du signal, la période du signal, la durée τ des impulsions, et le temps de propagation t_p de l'impulsion dans le câble qu'on supposera inférieur à T .
- Exprimer la célérité c de l'onde en fonction de L et t_p . Faire l'application numérique.

b. Analyse spectrale des impulsions de tension.

En choisissant l'origine des temps de manière à ce que la fonction associée au signal d'impulsions périodiques soit paire, on

montre qu'il peut être décomposé selon la relation :
$$U(t) = \frac{E\tau}{T} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi k f_1 \tau)}{\pi k f_1 \tau} \cos(2\pi k f_1 t) \right)$$

- Quel type d'analyse du signal est effectué ici ? Que représente le terme f_1 ? Comment s'exprime-t-il en fonction des paramètres du signal impulsionnel ?
- Que représente le terme constant de la décomposition ? Justifier alors son expression.
- Pour $T = 5,0\mu\text{s}$, $\tau = 2,0\mu\text{s}$ et $E = 5\text{V}$, établir un tableau des valeurs de l'amplitude et de la phase relative au signal fondamental jusqu'à l'harmonique de rang 8.
- Effectuer alors la représentation de son spectre en amplitude.

c. Ondes stationnaires dans le câble coaxial.

On alimente maintenant le câble en $z = 0$ par un générateur de signaux sinusoïdaux dont l'impédance interne vaut toujours $R_g = 50 \Omega$. On observe alors dans le câble coaxial des ondes stationnaires sinusoïdales, la valeur $R_g = 50 \Omega$ de la résistance interne du générateur permet de s'assurer qu'un ventre de vibration est situé à la cote $z = 0$.

- Donner l'expression générale d'une onde stationnaire $s(z,t)$ qu'on considérera d'amplitude A , de fréquence temporelle f , de longueur d'onde λ . Exploiter la condition limite imposée par le générateur en $z = 0$ pour la simplifier.
- Représenter le profil spatial de l'onde stationnaire pour différents temps bien choisis (au minimum 3 temps différents). Préciser le lieu des ventres et des nœuds sur cette représentation et préciser la distance séparant deux ventres successifs, deux nœuds successifs, un ventre et un nœud successif.

On suppose dans cette question que la condition limite en $z = L$ impose la présence d'un ventre en ce point.

- Montrer que cette condition impose une sélection des longueurs d'onde pour les ondes stationnaires et donner l'expression de ces longueurs d'ondes et des fréquences associées en fonction de L et de k un entier naturel non nul.

On suppose dans cette question que la condition limite en $z = L$ impose la présence d'un nœud en ce point.

- Montrer que cette condition impose une sélection des longueurs d'onde pour les ondes stationnaires et donner l'expression de ces longueurs d'ondes et des fréquences associées en fonction de L et de k un entier naturel.

Lorsque l'extrémité du câble coaxial est en circuit ouvert, on observe que la tension en $z = 0$ présente une amplitude maximale pour les fréquences suivantes.

fréquence $f(\text{MHz})$	0,94	1,93	2,88	3,92	4,82	5,84	6,82
---------------------------	------	------	------	------	------	------	------

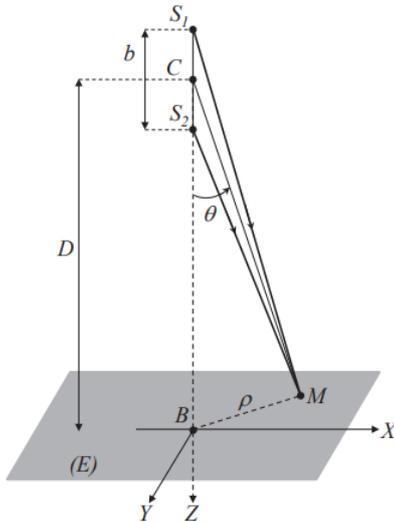
Lorsque l'extrémité du câble coaxial est en court circuit, on observe que la tension en $z = 0$ présente une amplitude maximale pour cette autre série de fréquences

fréquence $f(\text{MHz})$	0,55	1,44	2,44	3,58	4,36	5,53	6,30
---------------------------	------	------	------	------	------	------	------

- Quel phénomène explique l'observation de ces maxima d'amplitude de la tension en $z = 0$?
- Exploiter les données présentées dans les tableaux précédents pour déterminer la situation où on impose un ventre de l'onde stationnaire en $z = L$ et la situation où on y impose un nœud.

- Exploiter au mieux les données fournies pour exprimer puis évaluer numériquement la célérité des ondes de tension dans le câble coaxial.
- Comparer les valeurs de la célérité dans les parties a. et c. de ce problème.

Problème 3 : Interféromètre de Michelson.



L'interféromètre de Michelson est un appareil d'optique, non représenté ici, qui permet à partir d'une source lumineuse monochromatique de longueur d'onde (dans le vide) λ_0 ponctuelle dite primaire et notée S de produire deux sources ponctuelles S_1 et S_2 distantes de b et placées symétriquement autour du point C. La géométrie du système assure que les chemin optiques (SS_1) et (SS_2) sont égaux.

On peut alors observer dans le plan (E) de la figure ci contre la figure d'interférences résultant de la superposition des ondes lumineuses produites par les sources S_1 et S_2 . On note I_1 l'intensité de la lumière produite par S_1 et I_2 l'intensité de la lumière produite par S_2 en tout point M de (E).

Dans la suite, on suppose que le milieu de propagation des ondes lumineuses est de l'air d'indice optique n_0 (qu'on ne supposera pas unitaire !!)

- Expliquer pourquoi on pourra observer des interférences pour les ondes lumineuses produites par S_1 et S_2 .
- Exprimer alors l'intensité lumineuse $I(M)$ en M en fonction de I_1 , I_2 et le déphasage entre les deux ondes en M $\Delta\varphi_{2/1}(M)$.

- A quelle condition sur le déphasage l'intensité lumineuse observée sera minimale ? Comment nomme-t-on l'état interférentiel associé ? Exprimer l'intensité lumineuse dans cette configuration en fonction de I_1 et I_2 et montrer qu'elle s'annule à la seule condition $I_1=I_2=I_0$.

On suppose la condition précédente réalisée $I_1=I_2=I_0$.

- Exprimer l'intensité $I(M)$ en fonction de I_0 et $\Delta\varphi_{2/1}(M)$.
- Rappeler la définition du chemin optique (SM) et celle de la différence de marche $\delta_{1/2}(M)$ et donner l'expression de $\Delta\varphi_{2/1}(M)$ en fonction de λ_0 et $\delta_{1/2}(M)$.

On va maintenant chercher à calculer la différence de marche dans ce système.

- Exprimer L la longueur du segment [CM] en fonction de D et $\cos\theta$.
- Montrer que l_2 la longueur du segment $[S_2M]$ s'exprime $l_2 = \sqrt{L^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - Lb \cos\theta$. Exprimer de même l_1 la longueur du segment $[S_1M]$.
- En tenant compte du fait que $b \ll L$, montrer que $l_2 \approx L \left(1 - \frac{b}{2L} \cos\theta\right)$ et donner une expression approchée de l_1 .
- Etablir alors l'expression de $\delta_{1/2}(M)$ en fonction de $n_0 b$ et $\cos\theta$ puis celle de $\Delta\varphi_{2/1}(M)$.
- Quelle sera l'allure de la figure d'interférence ? En quel point du plan (E) le déphasage introduit est maximum ?

On suppose que le déphasage en B s'écrit sous la forme $\Delta\varphi_{2/1}(B)=2\pi.p_0$ avec p_0 un entier positif.

- Quel sera l'état d'interférence observé en B ? Quelle sera l'intensité lumineuse observée en B ?

On cherche maintenant à déterminer les valeurs de $\cos\theta$ pour lesquelles on observe un anneau clair, correspondant donc à un état interférentiel parfaitement constructif.

- Comment évolue le déphasage quand on part du centre de la figure vers l'extérieur ? En déduire l'expression du déphasage pour le premier anneau clair et établir l'expression de $\cos\theta_1$ associé. En déduire par analogie l'expression de $\cos\theta_k$ associé au k ème anneau clair.

On place sur la voie 1 et la voie 2 de l'interféromètre deux récipients identiques de largeur e , initialement plein d'air. On fait alors le vide dans le récipient situé sur la voie 1. On rappelle que l'indice optique du vide est strictement égal à 1. En vidant le récipient, on remplace un parcours de longueur $2e$ dans l'air par un parcours de longueur $2e$ dans le vide.

- Exprimer $\delta'_{1/2}(M)$ la nouvelle différence de marche en M en fonction de $\delta_{1/2}(M)$, e et n_0 .

Lorsqu'on vide le récipient, on observe les anneaux d'interférence rentrer vers le centre de la figure. Au total on voit disparaître en M_0 10 anneaux sombres et dans la situation finale on observe une frange claire en M_0 .

- Déterminer l'expression de $[n_0-1]$ en fonction de λ_0 et e . Faire l'application numérique pour $e=1\text{cm}$ et $\lambda_0=590\text{nm}$.

Résolution de problème : Le coup franc parfait Interféromètre de Michelson.

Le 8 décembre 2009 Cristiano Ronaldo marque un coup franc de 33m face à Marseille. Le ballon passe au-dessus du mur (situé à 9,15 m du tireur) pour aller se retrouver dans la lucarne (sous la barre transversale du but, à 2,44 m de hauteur).

- Evaluer la vitesse du ballon lors du tir de Ronaldo.